ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
ŞTIINŢĂ ŞI TEHNICĂ
13

N. CRISTESCU

PROBLEME DINAMICE IN TEORIA PLASTICITĂŢII

EDITURA TEHNICĂ

Scanned with OKEN Scanner

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ȘTIINȚĂ ȘI TEHNICĂ

13

N. CRISTESCU

PROBLEME DINAMICE ÎN TEORIA PLASTICITĂȚII

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI — 1958

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Teoria plasticității ocupă un loc important în mecanica corpurilor deformabile. Deși apărută recent, ea s-a dezvoltat rapid datorită importanței pe care o prezintă pentru cele mai diferite ramuri ale tehnicii. Unul din capitolele cele mai noi ale Teoriei plasticității, și anume studiul proceselor rapide de deformare plastică, face obiectul prezentei lucrări. Cercetările din acest domeniu au început să fie publicate aproximativ din anul 1945.

Materialul cuprins în prezenta lucrare a fost expus sub forma unui ciclu de conferințe, în cadrul Cursurilor de Știință și Tehnică în anul 1954. În anul școlar 1955—1956 acest material a fost predat timp de un semestru studenților din anul IV ai Facultății de Matematică și Fizică din București. In forma prezentată astăzi, lucrarea reprezintă textul întrucîtva modificat și completat al acestor prelegeri.

Lucrarea se adresează inginerilor, cercetătorilor, studenților, precum și tuturor celor dornici să cunoască cîteva din realizările noi din Teoria plasticității. Intrucît în limba romînă nu există deocamdată nici un curs elementar de Teoria plasticității, la începutul lucrării, într-o introducere, au fost expuse pe scurt unele noțiuni din Teoria plasticității, necesare înțelegerii restului lucrării. Se presupune însă că cititorul este familiarizat cu noțiunile generale din Teoria elasticității.

Din cauza materialului foarte vast, numeroase probleme au fost doar semnalate, trimițîndu-se cititorul eventual interesat la bibliografie.

Autorul mulțumește pe această cale Academicianului Gr. C. Moisil pentru încurajare și pentru interesul arătat față de această lucrare, precum și Editurii Tehnice pentru grija acordată la tipărirea ei; el prețuiește în mod deosebit ajutorul dat de Cornelia Cristescu la redactarea lucrării.

București, ianuarie 1957

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

§ 1. DEFINIȚII

Toate corpurile solide au proprietatea de a se deforma sub acțiunea unor forțe exterioare și a altor factori, cum ar fi: temperatura, presiunea hidrostatică, acțiunea îndelungată a timpului etc. Acești factori pot să acționeze simultan cu forțele exterioare, sau independent de ele; ei pot să modifice proprietățile mecanice ale materialelor și să provoace deformații suplimentare. Dacă prin înlăturarea tuturor factorilor care acționează asupra unui corp, în el rămîn deformații remanente ce nu se pot neglija, vom spune că acest corp s-a deformat plastic.

Proprietatea de a se deforma plastic nu o posedă numai anumite materiale speciale. Orice material, în anumite condiții, depinzînd în special de sarcina aplicată, presiunea hidrostatică, temperatură, timpul scurs de la aplicarea sarcinii etc., poate deveni plastic. Deformația reală a unui corp solid, oricît de mică ar fi ea, se compune dintr-o parte elastică și din alta plastică (remanentă). Cîteodată deformațiile plastice se pot neglija în raport cu cele elastice, altă dată ele sînt de același ordin de mărime cu cele elastice și, în sfîrșit, cîteodată ele sînt mult mai mari decît cele elastice, care deci se pot neglija în raport cu primele. Studiul deformațiilor elastice, atunci cînd se neglijează cele plastice, este făcut în Teoria elasticității. Studiul deformațiilor plastice, cînd se neglijează sau nu deformațiile elastice, face obiectul Teoriei plasticității.

Sub «Teoria plasticității» se înțelege deci studiul matematic al distribuției tensiunilor și deformațiilor într-un corp ce posedă proprietăți plastice, cînd sînt cunoscuți factorii exteriori ce acționează asupra lui precum și acțiunea lor anterioară ("istoria lor"). La baza acestei teorii stau un număr de lucrări experimentale ce se referă în special la structura macroscopică (fenomenologică) a fenomenului. Teoria plasticității își propune în primul rînd să găsească relații între tensiuni și deformații, în care ar

Scanned with OKEN Scanner

putea intra eventual și derivatele lor în raport cu timpul, care să fie în concordanță cu experiențele și care să fie suficient de generale pentru a putea fi aplicate unui număr cît mai mare de materiale și în condiții (de efort, temperatură, etc.) cît mai generale. Această problemă este numită « prima » problemă a teoriei plasticității. Cea de a doua problemă se referă la găsirea distribuției tensiunilor și deformațiilor în anumite probleme concrete puse de tehnică.

În stadiul actual, teoria este departe de a fi generală. Diferitele teorii existente se referă, fiecare în parte, la un număr redus de materiale sau fenomene. Teoria plasticității se referă în special la metale (prelucrarea lor, deformarea lor prin acțiunea îndelungată a sarcinii etc.) dar și la alte materiale ce posedă proprietăți asemănătoare în anumite condiții. Această teorie a fost aplicată de exemplu la pămînturi (lut, roci, nisipuri etc.), asfalt, gheață, scoarța terestră (în seismologie), beton, etc. Însă chiar pentru aceste materiale și chiar pentru un același material, în diferite intervale de variație a parametrilor (eforturi, temperatură, etc.) trebuie să fie aplicate diferite « teorii » ale plasticității.

În cele ce urmează, ne vom referi de cele mai multe ori, la materiale numite *ideal plastice*, adică acelea al căror proces de deformare plastică poate fi studiat neglijînd influența temperaturii, a presiunii hidrostatice și a acțiunii îndelungate a timpului asupra variației tensiunii și deformației. În afară de aceasta, vom considera procese « rapide » de deformare, în care de obicei nu se neglijează forțele de inerție. În teoria plasticității, acele probleme în care forțele de inerție, în general, nu se neglijează sînt numite « probleme dinamice ale teoriei plasticității ». Aceste probleme vor fi studiate, folosind în special teoria propagării undelor, teoria datorită lucrărilor lui *B. Riemann* [184], *E. B. Christoffel* [33], *H. Hugoniot* [88], [89] și *J. Hadamard* [71] (vezi și [128], [206]). Vor interveni atît unde plastice obișnuite, pe frontul cărora sînt discontinue derivatele prime ale tensiunilor, deformațiilor și vitezelor particulelor, cît și unde plastice de șoc pe frontul cărora sînt discontinue chiar tensiunile, deformațiile și vitezele.

§ 2. SCURT ISTORIC AL PROBLEMEI DINAMICE

Deși teoria plasticității datează încă din 1870, prin apariția lucrărilor lui *Saint-Venant*, problema dinamică a început să fie studiată mult mai tîrziu.

Se pare că cel care a pus primul problema lovirii longitudinale a unei bare metalice, și a apariției în felul acesta, a deformațiilor plastice propagabile, a fost *L. H. Donnell* [54]. Lucrarea lui datează

Scanned with OKEN Scanner

din 1930. El însă nu studiază sistematic problema şi mult timp, aproximativ 15 ani, nu au mai fost publicate lucrări referitoare la această problemă. Apoi problema dinamică a fost dezvoltată independent de mai mulţi autori: în Uniunea Sovietică de *H. A. Rahmatulin* [170] în 1945, în Anglia de *G. I. Taylor* [219] în 1946 şi în Statele Unite de *T. Kármán* şi *P. Duwez* [100] în 1950. Anii indicaţi se referă la data publicării, deşi se pare că unele rezultate au fost obţinute cu cîţiva ani înainte (vezi de exemplu [57]). Se poate deci afirma că problema dinamică a plasticităţii s-a dezvoltat în ultimii 12 ani.

Ultimele trei lucrări au avut o importanţă considerabilă, atît prin problemele puse şi rezultatele obţinute, cît şi prin faptul că au stimulat o serie întreagă de alte cercetări, Majoritatea acestor lucrări se referă la problema propagării undelor plastice în bare, dar s-au cercetat şi alte probleme: propagarea undelor plastice în fire, plăci, corpuri tridimensionale etc. La aceste lucrări ne vom referi în cursul expunerii.

Dintre lucrările mai mari sau de sinteză care se referă la probleme dinamice ale plasticităţii citäm: cartea lui *H. Kolsky* intitulată « Stress waves in solids » apărută în 1953 în limba engleză şi în 1955 în traducere rusă [105]. În ea există un capitol, capitolul VII, consacrat propagării undelor plastice şi a undelor de şoc în solide. Este dată şi o bibliografie a problemei. Rezultatele obţinute pînă în 1948 sînt expuse sistematic în Capitolul VII al cărţii lui *A. A. Iliuşin*, intitulată « Plasticinost » [92]. O expunere scurtă dar mai recentă a rezultatelor obţinute, precum şi o bibliografie mult mai completă se află într-un articol al lui *H. A. Rahmatulin* şi *G. S. Şapiro* [180]. Unele date bibliografice pot fi găsite şi în două articole de sinteză al lui *R. M. Davies* [52] [53]. O expunere a teoriei propagării undelor elasto-plastice sferice se poate găsi în lucrarea lui *W. Goldsmith* [252]. Lucrarea conţine şi bibliografia completă a acestei probleme pînă în 1953.

§ 3. CARACTERISTICILE MECANICE ALE MATERIALELOR

În cele ce urmează vom expune pe scurt felul de comportare al diferitelor materiale, cînd sînt supuse întinderii sau comprimării. Pentru detalii vom trimite la cursurile de rezistenţa materialelor.

Să presupunem că o epruvetă dintr-un material oarecare este supusă întinderii. Maşina de încercat furnizează diagrama tensiune-deformaţie (aici ca şi în cele ce urmează este vorba de deformaţie specifică), care diferă de la material la material şi de la un tip de experienţă la altul. Pentru un anume tip de experienţe această diagramă

Scanned with OKEN Scanner

caracterizează proprietăţile mecanice ale materialului respectiv. Pe abscisă se ia alungirea sau deformaţia, iar pe ordonată efortul sau tensiunea. Pe această curbă se pun în evidenţă mai multe puncte remarcabile. Să examinăm o astfel de curbă tensiune-deformaţie pe care o vom nota de acum cu $\sigma \sim \varepsilon$ (fig. 1).

Deocamdată vom presupune că această diagramă este convenţională, adică efortul este raportat la secţiunea iniţială. Ulterior vom utiliza cîteodată şi diagrame reale în care efortul este raportat la secţiunea actuală (micşorată).

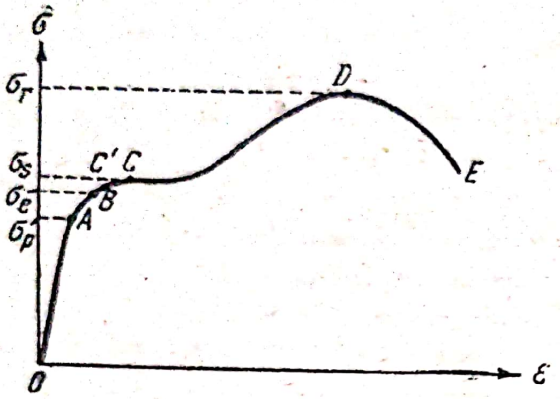

Fig. 1

La început curba este de obicei rectilinie. Punctul A marchează sfîrşitul acestei porţiuni. Ordonata lui, notată cu σ_p este numită *limită de proporţionalitate.* Dacă continuăm întinderea, materialul de obicei continuă să se comporte elastic. Punctul B corespunde limitei pînă la care materialul poate fi considerat elastic. Ordonata lui σ_e este numită *limită de elasticitate.* Această limită are totuşi un caracter convenţional, căci orice deformaţie elastică, oricît de mică ar fi, este însoţită totdeauna şi de o deformaţie remanentă, De multe ori, aceasta din urmă este neglijabilă. Punctul B marchează porţiunea de pe diagramă pînă la care deformaţiile remanente se pot neglija. Poziţia lui depinde deci de aproximaţia cerută în fiecare experienţă în parte. De obicei, pentru metale, deformaţiile remanente în punctul B sînt de ordinul 0,001—0,03%, dar mărimea lor variază de la caz la caz. Punctele A şi B sînt de obicei foarte apropiate şi de cele mai multe ori noi le vom considera confundate.

Continuînd întinderea obţinem un alt punct remarcabil, care joacă un rol deosebit în teoria plasticităţii, punctul C'. Cînd tensiunea a atins valoarea corespunzătoare punctului C', deformaţiile remanente sînt destul de mari, astfel încît ele nu pot fi neglijate. Tensiunea corespunzătoare acestui punct va fi numită *limita convenţională de fluiditate* (în englezeşte: yield limit; în rusește: [221]: условный предел текучести). Dacă deformaţia corespunzătoare acestui punct (mărimea ei este convenţională şi depinde de condiţiile tehnice respective; ea este însă totdeauna mai mare decît deformaţia corespunzătoare limitei de elasticitate) este 0,2%, atunci limita convenţională de fluiditate este de obicei notată cu $\sigma_{0,2}$.

Există unele materiale a căror diagramă $\sigma \sim \varepsilon$ posedă (începînd din punctul C de pe fig. 1) un palier orizontal. Cînd tensiunea a atins valoarea corespunzătoare punctului C, chiar dacă ea rămîne constantă, și uneori chiar dacă ea scade, deformația crește. Avem impresia că materialul devine fluid. Ordonata corespunzătoare punctului C o vom numi *limită de fluiditate* (în englezește: yield limit; în rusește: предел текучести). Pentru diagramele $\sigma \sim \varepsilon$ ce posedă un asemenea palier orizontal, punctul C' coincide de obicei cu punctul C. De aceea, fără a provoca confuzii, vom numi tensiunile corespunzătoare celor două puncte: *limită de fluiditate* și o vom nota cu σ_s, conform notației obișnuite din teoria plasticității[1]).

Procesul ce urmează după depășirea limitei de fluiditate, cît timp deformațiile plastice sînt aproximativ de același ordin de mărime cu cele elastice, este numit « *deformare plastică* » (în englezește: plastic deformation; în rusește: пластическое деформирование). Cînd deformațiile plastice au devenit foarte mari, în sensul că cele elastice pot fi neglijate în raport cu primele, procesul corespunzător va fi numit « *curgere plastică* » (în englezește: plastic flow; în rusește: пластическое течение) Deci cuvîntul « curgere » în teoria plasticității este atașat ideii că deformațiile plastice pot fi oricît de mari (ca la lichidele vîscoase). Acestor două procese le corespund două porțiuni de pe diagrama $\sigma \sim \varepsilon$. *Limita de curgere* desparte cele două porțiuni; ea desparte deci porțiunea de pe diagrama $\sigma \sim \varepsilon$ în care deformațiile plastice sînt aproximativ de același ordin de mărime cu cele elastice, de porțiunea în care deformațiile elastice pot fi neglijate, ca fiind foarte mici în comparație cu cele plastice. Pentru unele materiale, deformațiile elastice se pot neglija încă de la începutul procesului de deformare plastică; în acest caz limita de curgere coincide cu cea de fluiditate. Această coincidență are loc de exemplu la materialele a căror diagramă $\sigma \sim \varepsilon$ posedă un palier orizontal foarte lung.

Trecerea din domeniul elastic în cel plastic, este de obicei lină (ca în fig. 1). Există însă unele materiale, ce-i drept mai puține la număr, în care trecerea de la domeniul elastic la cel plastic se face brusc și limita de elasticitate nu mai are un caracter convențional, ci corespunde unui fenomen fizic bine definit. Acest fenomen ar putea fi explicat presupunînd că epruveta este formată din două materiale constituante: unul casant și altul ductil. Pînă la atingerea unei anumite tensiuni, scheletul materialului casant constitutiv

---

[1]) Termenul « fluiditate » este folosit de autor, ca corespondent al termenului englezesc « yielding » și a celui rusesc « текучесть » În loc de „limită de fluiditate" s-ar putea eventual utiliza în limba romînă termenul "tensiune critică de plasticitate" după termenul francez; „tension critique de plasticité".

Scanned with OKEN Scanner

suportă aproape întreaga sarcină. La atingerea acestei tensiuni, acest schelet se rupe şi încărcarea este transferată materialului ductil. La materialele pentru care trecerea de la domeniul elastic la cel plastic se face brusc (bronz, oţel moale) pe diagrama $\sigma \sim \varepsilon$ apare un vîrf ascuţit (fig. 2). În acest caz punctele A, B, C, şi C' se suprapun în acest vîrf. În cele ce urmează, de cele mai multe ori noi vom considera că toate aceste puncte sînt confundate, chiar dacă pe diagrama $\sigma \sim \varepsilon$ nu apare un vîrf ascuţit.

Punctul D corespunde de obicei, apariţiei în epruvetă a unei gîtuituri. Ordonata corespunzătoare este numită *rezistenţă de rupere*, σ_r. Curînd după apariţia gîtuiturii, materialul de obicei se rupe, căci gîtuitura se îngustează foarte repede, chiar pentru tensiuni descrescătoare. Punctul E de pe diagramă corespunde ruperii. Vom numi o asemenea rupere (cu apariţia gîtuiturii) — « *rupere vîscoasă* » (de exemplu la oţelul moale), spre deosebire de ruperea « *casantă* » care are loc fără apariţia gîtuiturii, chiar în punctul D (la fontă, piatră). Ruperea vîscoasă are loc după apariţia unor mari deformaţii plastice, cea casantă are loc după apariţia unor mici deformaţii plastice. Ruperea vîscoasă este legată de curgerea corpului solid sub acţiunea tensiunii de forfecare, iar ruperea casantă apare atunci cînd fisurile mărunte apărute în material, cresc sub acţiunea tensiunii de întindere. Dacă încărcarea este aplicată pentru un timp foarte scurt, tensiunea de forfecare care apare nu reuşeşte să producă o curgere vizibilă şi multe materiale suportă tensiuni de scurtă durată mult mai mari decît limita lor statică de fluiditate [160]. De obicei cu cît solicitările sînt de durată mai scurtă cu atît ruperea epruvetei are un caracter mai casant, fără curgere în jurul suprafeţei de rupere. Deci proprietatea de a fi casant nu se referă numai la material, ci şi la experienţa respectivă: un material poate fi casant sau nu, depinzînd de condiţiile experienţei respective. De exemplu, plăcile de sticlă sînt casante dar firele de sticlă sînt vîscoelastice. Cu creşterea temperaturii, a presiunii sau a intervalului de timp în care este efectuată experienţa de încărcare, materialul considerat iniţial casant poate deveni plastic sau vîscos.

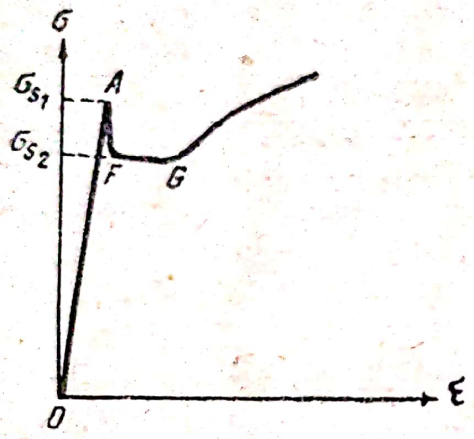

Fig. 2

Deci, apariţia unei gîtuituri într-o epruvetă marchează de obicei începutul procesului de rupere. Există însă unele materiale pentru

Scanned with OKEN Scanner

care apariţia gîtuiturii nu este legată de ruperea materialului, ci de o întărire a lui. *J. Miklowitz* [138] şi *A. Nadai* [149] au pus în evidenţă experimental, o proprietate foarte interesantă a firelor de nylon. Această proprietate o mai posedă multe alte fire, făcute din alte materiale plastice [136]. Dacă este întins un fir de nylon şi tensiunea depăşeşte o anumită limită, în fir apar una sau mai multe gîtuituri. Aceste gîtuituri nu continuă să se strîmteze, ci se propagă în tot firul (fig. 3, *b*). Acesta este aşa-numitul proces de cristalizare a nylonului, care are loc pe porţiunea *MN* a diagramei $\sigma \sim \varepsilon$ din fig. 3, *a*. Dacă tensiunea continuă să crească, firul continuă să se deformeze, dar este mult mai rezistent. Apoi, pentru o anumită valoare a tensiunii, el se rupe. În fig. 3, *a*, care este reprodusă după Miklowitz, diagrama superioară corespunde aşa-numitei «tensiuni adevărate» (englezeşte: true stress; ruseşte: истинное напряжение) care este efortul raportat la secţiunea transversală minimă din fir. Curba de jos de pe aceeaşi figură corespunde «tensiunii» în sensul obişnuit al cuvîntului, adică efortul raportat la secţiunea iniţială. Asupra acestei proprietăţi a nylonului vom reveni în cap. VI.

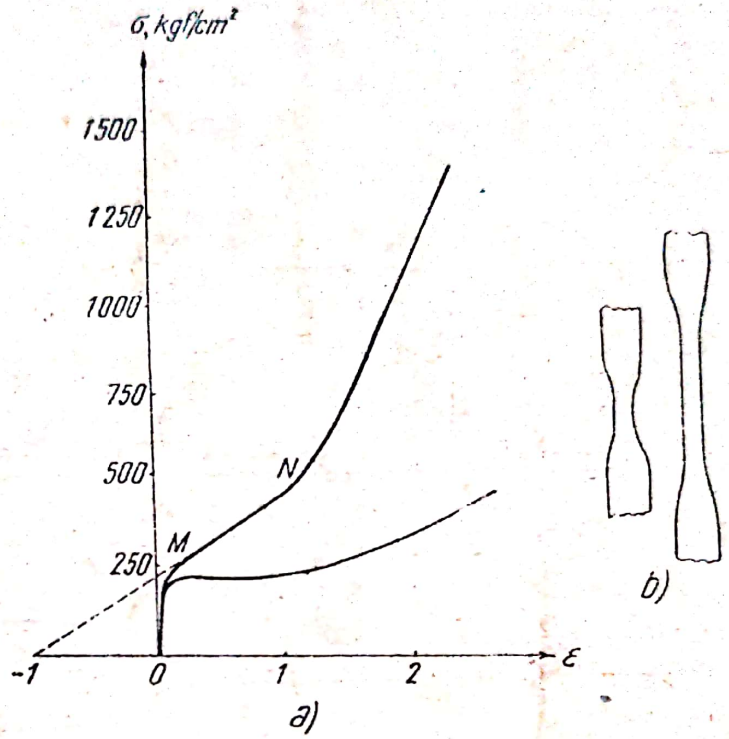

Fig. 3

Pentru experienţele de compresiune, diagrama $\sigma \sim \varepsilon$ este similară. Pentru majoritatea materialelor, curbele de întindere şi cele de compresiune sînt aproximativ simetrice în raport cu originea. În cele ce urmează noi le vom considera totdeauna simetrice (fig. 4).

Materialele pentru care diagrama $\sigma \sim \varepsilon$, dincolo de limita de elasticitate este strict crescătoare (ca în fig, 4), le vom numi *consolidabile* (englezeşte: work-hardening; ruseşte: упрочнение). Să explicăm această denumire. Dacă dintr-un punct oarecare *B* de pe diagramă începem descărcarea, obţinem segmentul *BC* paralel cu *OA*. O descărcare de acest tip o vom numi perfect elastică. În procesul

de descărcare intervin citeodată și o serie de alte fenomene: fenomenul de histerezis, procese plastice etc. Pentru materialele și experiențele considerate în această lucrare, descărcarea va fi considerată totdeauna perfect elastică. Reîncepînd încărcarea din punctul C ca și cum am fi avut o nouă stare inițială, materialul se comportă elastic pe porțiunea CB și deci limita de elasticitate a devenit

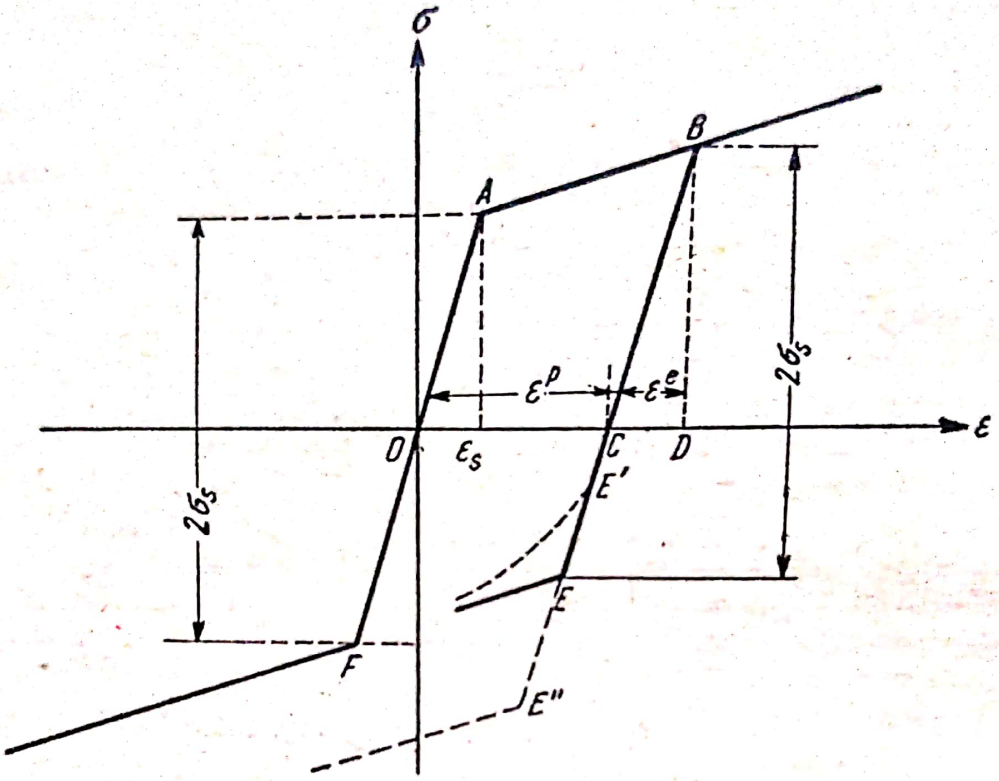

Fig. 4

mai mare. De aceea vom spune că materialul s-a consolidat. Dacă întreruperea experienței în punctul C este de lungă durată, la o nouă încărcare s-ar putea ca diagrama să se ridice deasupra lui B.

Dacă din punctul C am fi continuat imediat experiența, supunînd epruveta unei compresiuni, se pot obține mai multe diagrame teoretice. Dacă deformațiile remanente de compresiune se obțin de abia în punctul E'', segmentul BC fiind egal cu CE'', zicem că un asemenea material idealizat consolidează izotrop. Trebuie să atragem atenția că materialele reale nu satisfac o asemenea relație, dar aceasta este deseori utilizată pentru simplitatea ei. Pentru alte materiale deformarea într-o direcție (întindere) nu influențează deloc limita de fluiditate în direcția opusă (compresiune), care rămîne deci tot $-\sigma_s$. Însfîrșit se face uneori presupunerea că intervalul de variație a tensiunilor elastice rămîne mereu $2\sigma_s$, astfel încît deformațiile remanente de compresiune ar apărea (fig. 4) în

punctul E (această diagramă în care segmentul AF este egal şi paralel cu BE, este diagrama teoretică cea mai des utilizată şi care de multe ori este satisfăcătoare din punct de vedere fizic). La majoritatea materialelor se observă însă că deformaţiile remanente apar pentru tensiuni de compresiune şi mai mici (punctul E' pe fig. 4). Această micşorare a limitei de fluiditate datorită încercărilor repetate de semne contrare, se numeşte efect *Bauschinger* şi a fost descoperit în 1886. El este aproape complet nestudiat din punct de vedere teoretic şi deci, de obicei, neconsiderat în calcule. Pentru unele materiale, totuşi, influenţa lui este apreciabilă. De exemplu, dacă iniţial intervalul de variaţie al deformaţiilor elastice era $2\sigma_s$, după deformare într-o direcţie, datorită efectului Bauschinger, el se poate reduce chiar pînă aproape de σ_s.

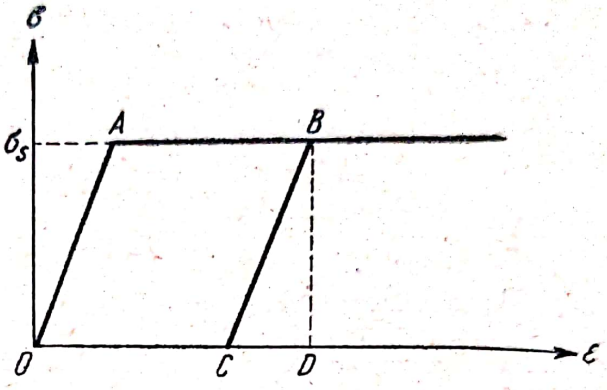

Fig. 5

În timpul întinderii, epruvetele se contractă lateral. Raportul dintre contracţia transversală şi deformaţia longitudinală, se notează de obicei cu μ. El este numit coeficientul lui Poisson. Cu cît deformaţiile plastice sînt mai mari în comparaţie cu cele elastice, cu atît valoarea lui μ este mai aproape de valoarea $\frac{1}{2}$. De cele mai multe ori în teoria plasticităţii se ia $\mu = \frac{1}{2}$.

Să trecem acum în revistă cîteva tipuri de curbe $\sigma \sim \varepsilon$, care intervin mai des în teoria plasticităţii. Uneori curba $\sigma \sim \varepsilon$, pentru multe materiale, se poate aproxima prin două drepte (fig. 5):

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{şi} \quad \sigma_s = \text{const.} \tag{0.1}$$

A doua dreaptă este orizontală şi caracterizează stadiul plastic al materialului. În punctul de intersecţie al acestor două drepte, limita de elasticitate, cea de proporţionalitate şi cea de fluiditate se confundă. Materialele ale căror proprietăţi mecanice sînt descrise de această schemă idealizată, vor fi numite *perfect plastice* (englezeşte: perfectly plastic; rusește: идеально-пластичный). Caracteristic pentru aceste materiale este deci faptul că în timpul curgerii plastice, limita de fluiditate este constantă.

Materialele care nu sînt perfect plastice, după cum am mai spus, sînt prin definiţie *consolidabile*. Definiţia noţiunii de material « perfect plastic » sau « consolidabil » este uşor de dat numai în cazul unidimensional, cînd luăm în considerare numai o singură compo-

Scanned with OKEN Scanner

nentă a tensiunii şi o singură componentă a deformaţiei. Pentru cazul tridimensional, aceste noţiuni au un caracter oarecum convenţional şi depind de ceea ce numim în acest caz « tensiune » în sens generalizat şi « deformaţie » în sens generalizat. În orice caz, caracteristic pentru materialele consolidabile este faptul că limita (condiţia) de fluiditate nu este constantă în timpul curgerii plastice.

Dacă după depăşirea limitei de elasticitate, diagrama unui material consolidabil poate fi aproximată cu o dreaptă, materialul este numit consolidabil *liniar* (fig. 4). Proprietăţile lui mecanice pot fi aproximate prin dreptele

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{şi} \quad \sigma = \sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s) \tag{0.2}$$

constanta E_1 fiind numită modul de consolidare. Ea este aproximativ de zece ori mai mică decît modulul lui Young E. Schema dată de relaţiile (0.2) este numită schema lui Prandtl.

Dacă diagrama $\sigma \sim \varepsilon$ poate fi aproximată printr-o funcţiune exponenţială de forma

$$\sigma = K\,\varepsilon^{\nu} \tag{0.3}$$

spunem că materialul se consolidează exponenţial. Acestea sînt principalele scheme date pentru materialele consolidabile, dar au fost date şi altele. Citǎm aici relaţia propusă de *W. Prager* [163] sub forma unei serii impare $E\,\varepsilon = \sigma + a_3\sigma^3 + a_5\sigma^5 + \ldots$

Vom observa că proprietatea de consolidare a materialelor se modifică prin trecerea unui interval foarte lung de timp, în sensul că consolidarea (modulul de consolidare) scade în timp. Consolidarea scade şi cu creşterea temperaturii. Pentru temperaturi foarte mari consolidarea poate chiar să dispară complet.

Din diagramele de mai sus rezultă că deformaţia totală într-un punct se compune dintr-o parte elastică şi o parte plastică $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$. La studiul unor materiale elastice neliniare, cum este de exemplu cauciucul, se utilizează o relaţie similară. Deformaţia totală este atunci suma a două componente: deformaţia elastică obişnuită şi deformaţia «supra-elastică» (în englezeşte: high-elastic; în ruseşte: высоко-эластическая). Revenind la diagramele de mai sus, vom numi materiale *elasto-plastice* acele materiale schematizate în care nu se neglijează deformaţiile elastice. Dacă însă deformaţiile elastice pot fi neglijate în comparaţie cu cele plastice, materialul schematizat corespunzător va fi numit *plastic-rigid*. În acest caz deformaţia totală este pur plastică.

Pentru materialele elasto-plastice se introduce noţiunea de energie potenţială a deformaţiei, energie ce se eliberează prin descărcare şi este reprezentată în fig. 4 şi fig. 5 prin aria triunghiului *BCD*.

Scanned with OKEN Scanner

La materiale plastic-rigide această noțiune, evident, nu există. Se mai introduce și noțiunea de lucru a deformației $W = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon$ care se reprezintă prin aria mărginită de conturul $OABDO$. La materialele consolidabile, lucrul W este cu atît mai mare cu cît punctul B este mai sus pe diagramă.

Din cele de mai sus rezultă că în domeniul elastic există o corespondență biunivocă și bicontinuă între tensiuni și deformații. Ea este dată de legea lui Hooke. În domeniul plastic, această corespondență nu mai are loc; unei valori a tensiunii pot să-i corespundă chiar o infinitate (de puterea continuului) de valori ale deformației.

Trebuie să mai observăm că toate diagramele de mai sus, au fost construite presupunînd că epruvetele sînt deformate în mașina de încercat cu viteze constante. S-a observat însă că viteza de deformare influențează asupra diagramei $\sigma \sim \varepsilon$, în special la acele materiale care au limita de elasticitate bine determinată. Cu cît viteza de deformare este mai mare, cu atît limita de elasticitate este și ea mai mare. Limita dinamică de elasticitate poate fi, pentru unele materiale, mult mai mare (de două, trei ori) decît limita statică. Ea depășește cîteodată chiar limita statică de rezistență a materialului respectiv, deși în experiența dinamică materialul nu se rupe (v. de exemplu [27]). Este clar că limita dinamică de rezistență este în general mult mai mare decît limita statică de rezistență. La această concluzie a ajuns *B. Hopkinson* [83] în urma experiențelor făcute de el încă în 1905. De remarcat că deformația de rupere în cazul dinamic este mult mai mică decît în cazul static [237]. Cu cît viteza de încărcare este mai mare, cu atît ruperea materialului se aseamănă mai mult cu o rupere casantă. Vom mai atrage în sfîrșit atenția că pentru unele materiale (cauciucuri) și modulul de elasticitate poate să crească foarte mult cu creșterea vitezei de deformare (v. de exemplu [106]).

Să descriem acum pe scurt cîteva proprietăți ale materialelor, legate în special de scurgerea unui interval îndelungat de timp. Dacă în timpul unei experiențe de întindere sau compresiune a unei epruvete, experiența este întreruptă menținîndu-se tensiunea mereu constantă, se constată că deformația va crește încet în timp. Dacă însă din momentul întreruperii deformația este menținută constantă, se constată că într-un interval lung de timp, tensiunea scade. Cele două fenomene descrise sînt cele două aspecte ale *postefectului* (englezește: aftereffect; rusește: последействие). Prin postefect vom înțelege deci: variația în timp a deformațiilor, după ce s-a terminat procesul de variație a încărcării (încărcare sau descărcare totală sau parțială) sau variația în timp a tensiunilor sau eforturilor

cînd deformaţia totală este fixată. La această terminologie se adaugă cuvîntul «elastic», «plastic» sau «elasto-plastic» în funcţie de condiţiile în care s-a produs fenomenul de postefect.

Prin *relaxaţie* vom înţelege postefectul exprimat prin variaţia în timp a tensiunilor sau eforturilor materialului deformat, a cărui deformaţie totală este fixată. Vom numi *fluaj* (englezeşte: creep; ruseşte: ползучесть) creşterea înceată în timp a deformaţiilor plastice ale materialului, sub acţiunea unor forţe mai mici decît acelea care pot să producă deformaţii remanente, în încercări de durată obişnuită [1]). Temperatura influenţează mult fluajul materialelor.

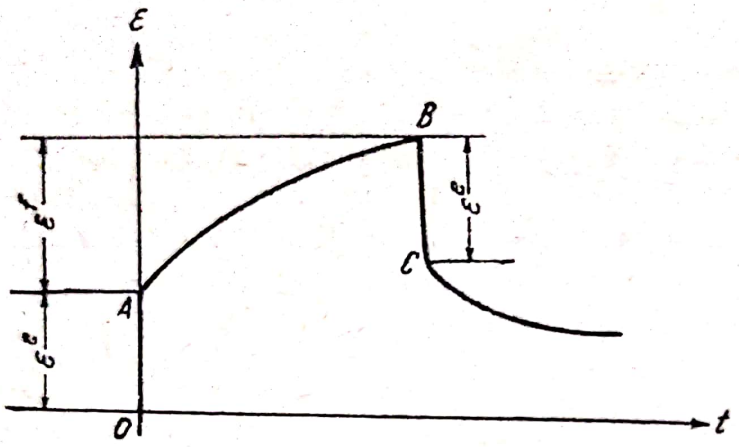

Fig. 6

Fig. 6 reprezintă o diagramă tip a fenomenului de fluaj. Dacă la momentul $t = 0$, aplicăm o sarcină care apoi este menţinută constantă, materialul se deformează brusc (deformaţia corespunzătoare a fost notată cu ε^e) şi apoi el continuă să se deformeze încet în timp. Deformaţia totală la un moment dat este suma a două componente: deformaţia elastică instantanee ε^e şi deformaţia datorită fluajului ε^f. Dacă după un anumit interval de timp (eventual cîţiva ani) înlăturăm brusc sarcina, deformaţia se micşorează brusc cu ε^e, dar continuă apoi să se micşoreze în timp. Această micşorare în timp a deformaţiei (începînd din punctul C din fig. 6) poartă numele de *fluaj invers* (englezeşte: recovery; ruseşte: восстановление). Pentru mai multe detalii privind teoria fluajului, a se vedea cărţile lui *L. M. Kacianov* [99], *N. H. Arutiunian* [10] şi a lui *Levi-Pizzetti* [129].

§ 4. TEORIILE PLASTICITĂŢII

Pentru descrierea matematică a procesului general (în două sau trei dimensiuni) de deformare (curgere) plastică, avem nevoie de mai multe relaţii în care vor interveni componentele tensiunii şi ale deformaţiei şi în general şi derivatele lor în raport cu timpul. În primul rînd vom avea nevoie de o relaţie, dată de obicei în tensiuni,

[1]) Ultimele definiţii nu sînt general adoptate. Cele indicate aici au fost reproduse din [221].

Scanned with OKEN Scanner

care precizează ce condiţii trebuie să satisfacă tensiunile într-un punct al corpului pentru ca deformarea plastică să aibă loc. Această relaţie o vom numi *condiţie de plasticitate*. Pe de altă parte, pentru fiecare din aceste stări de tensiune, alte relaţii vor lega tensiunile de deformaţii. Aceste relaţii vor constitui aşa-numita *lege de curgere*. Condiţia de plasticitate împreună cu legea de curgere determină *mecanismul de curgere* sau « *teoria* » respectivă a plasticităţii. Au fost propuse multe asemenea teorii. Mai jos vom aminti pe scurt numai acelea ce sînt utilizate în prezenta lucrare şi care dealtfel sînt considerate astăzi clasice. Pentru mai multe detalii vom trimite cititorul la cărţile lui *A. A. Iliuşin* [92], *V. V. Sokolovski* [214] *L. M. Kacianov* [98], *R. Hill* [76], *W. Prager* şi *P. Hodge* [166], *N. I. Bezuhov* [20] şi a lui *A. Nadai* [149]. Cărţile lui *Nadai* şi *Hill* sînt traduse şi în limba rusă.

Vom conveni că indicii repetaţi înseamnă « sumare », iar indicii puşi după virgulă înseamnă « derivare » în raport cu coordonata ce poartă acel indice. Derivatele în raport cu timpul vor fi marcate prin puncte puse deasupra literelor.

a) **Condiţia de plasticitate.** Vom zice [164] că un material este în *stadiul elastic* dacă orice variaţie infinitezimală a tensiunilor lasă deformaţia remanentă neschimbată. Dacă această condiţie nu este satisfăcută vom zice că materialul este în *stadiul plastic*. Domeniul elastic asociat unei stări date, este totalitatea stărilor elastice ce se pot obţine din starea dată, fără a trece în domeniul plastic. Toate aceste stări elastice sînt caracterizate de o aceeaşi deformaţie remanentă, tensiunile putînd însă să varieze. Limita de fluiditate (sau condiţia de plasticitate) a domeniului elastic, este totalitatea tensiunilor care mărginesc acest domeniu.

O variaţie infinitezimală a tensiunii, pornind de la o stare plastică, poate conduce materialul într-un stadiu elastic sau plastic. În primul caz zicem că avem de-a face cu o *descărcare*; iar în al doilea cu o *încărcare* sau cu o variaţie *neutrală*, după cum deformaţia remanentă variază şi ea sau nu.

În decursul timpului au fost propuse foarte multe relaţii, numite condiţii de plasticitate, care să caracterizeze stadiul plastic al materialului. Aceste condiţii au fost exprimate în deformaţii, în tensiuni sau în deformaţii şi în tensiuni. De obicei se presupune că legea lui Hooke este aplicabilă pînă în momentul cînd materialul devine plastic. De aceea putem utiliza această lege pentru a transcrie condiţia de plasticitate numai în tensiuni. O asemenea relaţie este deci de forma

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K \qquad (0.4)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde σ_1, σ_2 și σ_3, sînt componentele principale ale tensiunii, iar K o constantă.

Într-un spațiu de coordonate σ_1, σ_2, σ_3, relația (0.4) reprezintă o suprafață ce conține originea în interior. O stare de tensiune va fi reprezentată în acest spațiu printr-un vector. Dacă extremitatea vectorului se află în interiorul suprafeței, materialul este în stadiul elastic, dacă el se află pe suprafață, materialul se află în stadiul plastic. Cazul cînd extremitatea vectorului este în exteriorul suprafeței (0.4) nu este posibil la materialele perfect plastice.

Unele precizări cu privire la forma funcțiunii f ce intervine în (0.4) se pot face teoretic. În ultimă instanță însă, ea trebuie verificată experimental.

Vom presupune totdeauna că materialul este izotropic, o schimbare de axe nu trebuie să influențeze deci condiția de plasticitate, după cum ea nu influențează nici legea lui Hooke. De aici rezultă că funcția f depinde de tensiuni numai prin intermediul invarianților tensorului tensiune.

Din experiențe s-a constatat însă că presiunile hidrostatice obișnuite (variind chiar într-un interval destul de larg) nu provoacă deformații remanente apreciabile. De aceea se presupune că deformațiile plastice depind numai de deviatorul tensiunilor $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ cu $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = j \\ 0 \text{ pentru } i \neq j \end{cases}$ (tensorul lui Kronecker) și nu de presiunea hidrostatică $p = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$. Deci și condiția de plasticitate va depinde numai de deviatorul tensiunilor, și anume de invarianții săi.

$$f(J_2, J_3) = K \quad \text{cu} \quad J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad \text{și} \quad J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} \qquad (0.5)$$

(primul invariant, după cum se știe, este nul $s_{ii} = 0$).

Pe de altă parte se presupune de obicei că suprafața (0.5) este simetrică în raport cu originea, în sensul că dacă σ_{ij} este o stare de tensiune plastică și $-\sigma_{ij}$ este o stare de tensiune plastică. Cu alte cuvinte se presupune că nu are loc efectul Bauschinger. Deci J_3 intervine numai prin puteri pare în (0.5).

Să dăm în cele ce urmează cîteva exemple, care vor fi utilizate și în prezenta lucrare. Cea mai cunoscută condiție de plasticitate, este cea propusă de *Mises* [123]

$$J_2 = \tau_s \qquad (0.6)$$

unde τ_s este limita constantă de fluiditate la forfecare. O altă condiție tot atît de cunoscută este condiția lui *Tresca* [227]. Ea presu-

Scanned with OKEN Scanner

pune că în timpul curgerii plastice cea mai mare tensiune tangențială de forfecare este constantă. Deci în timpul curgerii plastice una din tensiunile principale $\sigma_1 - \sigma_2 = s_1 - s_2$ sau $s_2 - s_3$ sau $s_3 - s_1$ este constantă în valoare absolută și egală cu $2\tau_s$. Rezultă deci condiția

$$[(s_2 - s_3)^2 - 4\tau_s^2][(s_3 - s_1)^2 - 4\tau_s^2][(s_1 - s_2)^2 - 4\tau_s^2] = 0. \quad (0.7)$$

Cu ajutorul invarianților această condiție se scrie

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36\tau_s^2 J_2^2 + 96\tau_s^4 J_2 - 64\tau_s^6 = 0.$$

Sub această formă ea este complicată și greu de utilizat în calcule.

Majoritatea funcțiilor ce intervin în (0.5) sînt *regulate*, în sensul că derivatele lor în raport cu tensiunile sînt continue. Pentru asemenea materiale *W. Prager* [164] a arătat că viteza de deformare plastică este dată de

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (0.8)$$

în care $\lambda = 0$ pentru domeniul elastic și al începutului descărcării și $\lambda \geqslant 0$ pentru domeniul plastic.

Există însă și condiții de plasticitate ce nu satisfac cerința de a fi date de funcții regulate. Un exemplu este condiția lui *Tresca* expusă mai sus. Extinderea relației (0.8) pentru limite de fluiditate zise singulare, în care funcția $f(\sigma_{ij})$ posedă discontinuități ale derivatei, a fost făcută de *W. T. Koiter* [102]. El a considerat cazul cînd starea de curgere plastică este definită de un număr finit sau nemărginit de funcții regulate.

Relația (0.8) arată că viteza de deformare plastică se poate reprezenta printr-un vector normal suprafeței de fluiditate. Mărginindu-ne la condiția lui *Tresca* și la cazul plan (fig. 57), vom observa că acest vector (dirijat către exteriorul figurii) este unic determinat pe laturile exagonului, el fiind normal acestor laturi. În cele șase vîrfuri el nu este unic determinat. Într-unul din aceste vîrfuri el poate fi normal fie unei laturi, fie celeilalte, sau, poate lua toate pozițiile intermediare (v. punctul *A* din fig. 57).

Toate considerațiile de mai sus se referă la materialele perfect plastice. Dacă materialul nu este perfect plastic (deci este consolidabil) sau dacă mai intervin și alte fenomene (anizotropie, efect Bauschinger etc.), atunci condiția de plasticitate va depinde și de deformații, precum și de întregul istoric al deformațiilor anterioare. În acest caz, se presupune cîteodată că limita de fluiditate este tot de forma (0.5), dar *K* nu mai este o constantă ci o funcție ce depinde de deformații și de istoricul lor. În acest caz limita de flui-

Scanned with OKEN Scanner

ditate se reprezintă în spațiul σ_1, σ_2, σ_3, printr-o suprafață simetrică în raport cu bisectoarea, dar pe măsură ce deformațiile cresc, această suprafață se mărește prin omotetie și se deformează. Dacă materialul își pierde izotropia în cursul deformării plastice, atunci suprafața (0.5) se deformează dar se și rotește în raport cu bisectoarea $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ astfel încît după deformare în direcția diferitelor axe obținem diferite limite de fluiditate. Dacă materialul inițial era anizotrop, încă de la început suprafața (0.5) nu ar fi fost simetrică în raport cu dreapta $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Dacă limita de fluiditate este de forma $f(\sigma_{ij}, \varepsilon^p_{ij}) = 0$, atunci materialul respectiv posedă efectul Bauschinger. Geometric acest efect se ilustrează în spațiul σ_1, σ_2, σ_3 astfel: inițial limita de fluiditate poate fi simetrică în raport cu originea (punctele σ_{ij} și $-\sigma_{ij}$ aparțin ambele suprafeței de fluiditate) dar după deformarea plastică această suprafață nu mai este simetrică.

Nu vom intra în detalii privind limita de fluiditate pentru materialele consolidabile. Pentru detalii a se vedea cărțile citate mai sus precum și bibliografia indicată în ele. În cele ce urmează vom presupune că condiția de consolidare este dată totdeauna printr-o relație între invarianții pătratici ai deviatorilor tensiunilor și deformațiilor

$$S = \mathfrak{F}(E) \tag{0.9}$$

cu $S^2 = J_2 = \frac{1}{2} s_{ij}\, s_{ij}$ și $E^2 = \frac{1}{2} e_{ij}\, e_{ij}$. Cîteodată această relație este o relație între așa-numita «intensitate a tensiunilor tangențiale» $\sigma_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\, S$ și «intensitatea deformațiilor» $e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} E$. Pentru diferite tipuri de materiale, funcțiunea $\mathfrak{F}$ va fi particularizată în diferite, moduri.

b) **Relații dintre tensiuni și deformații.** Deformația totală în domeniul plastic este suma deformației elastice și a celei plastice $\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij}$. Deviatorul deformațiilor se descompune într-un mod similar $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij} = e^e_{ij} + e^p_{ij}$. În toate teoriile plasticității de care va fi vorba în cele ce urmează se presupune că volumul nu se poate deforma plastic; deci se presupune că volumul este incompresibil plastic. Deci $e^p = \frac{1}{3}\, \varepsilon_{ii} = 0$ și deci $e^p_{ij} = \varepsilon^p_{ij}$; deviatorul deformațiilor plastice coincide cu deformațiile plastice.

În teoriile în care intervin deformațiile, se presupune de obicei că ele sînt mici, în sensul că relațiile dintre deformațiile ε_{ij} și de-

Scanned with OKEN Scanner

plasările u_k sînt $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$. În cele în care intervin vitezele de deformare, relațiile dintre ele și vitezele v_k ale particulelor sînt de forma $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$. În cazul micilor deformații avem $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ și deci vitezele de deformare se obțin prin derivarea în raport cu timpul a deformațiilor.

Teoria lui Prandtl-Reuss [167], [181]. În teoria lui Prandtl-Reuss se presupune că viteza plastică de deformare este proporțională în orice moment cu deviatorul tensiunilor

$$2G\dot{e}^p_{ij} = \lambda s_{ij} \tag{0.10}$$

unde λ este un scalar pozitiv, deocamdată nedeterminat. Deformațiile elastice satisfac legea lui Hooke pe care o vom scrie sub forma

$$2G\dot{e}^e_{ij} = \dot{s}_{ij}. \tag{0.11}$$

Dar pentrucă $e_{ij} = e^e_{ij} + e^p_{ij}$, din relațiile (0,10), (0,11) obținem

$$2G\dot{e}_{ij} = \dot{s}_{ij} + \lambda s_{ij}. \tag{0.12}$$

Factorul de proporționalitate λ se determină asociind la relațiile (0.12) condiția de plasticitate a lui Mises.

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \tau_s^2. \tag{0.13}$$

Înmulțind fiecare din relațiile (0.12) cu s_{ij} și ținînd seama de (0.13) obținem

$$\lambda = \frac{G}{\tau_s^2} \dot{e}_{ij} s_{ij}. \tag{0.14}$$

Deci λ depinde atît de tensiuni cît și de vitezele de deformare.

În cadrul teoriei lui *Prandtl-Reuss* se poate face presupunerea că materialul este compresibil elastic, deci

$$\sigma = 3K\varepsilon \tag{0.15}$$

cu $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ și $\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}$; sau se poate face presupunerea că atît în domeniul elastic cît și în cel plastic, materialul este incompresibil

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = 0. \tag{0.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

În timpul încărcării, în stadiul elastic este satisfăcută inegalitatea $J_2 < \tau_s^2$, iar în stadiul plastic $J_2 = \tau_s^2$ și $\dot{e}_{ij}\, s_{ij} > 0$. Ultima inegalitate corespunde ideii că lucrul de schimbare a formei este pozitiv. La începerea descărcării această expresie își schimbă semnul. În timpul descărcării este satisfăcută legea lui Hooke.

$$\dot{s}_{ij} = 2G\dot{e}_{ij}. \tag{0.17}$$

Teoria lui S. Venant-Lévy-Mises [193], [130], [140]. În teoria lui *Prandtl-Reuss* se presupunea că deformațiile elastice sînt de același ordin de mărime cu cele plastice și deci ele nu pot fi neglijate. Dacă însă deformațiile plastice sînt foarte mari în comparație cu cele elastice, acestea din urmă se pot neglija. O teorie în care deformațiile elastice sînt neglijate, este tocmai teoria lui *S. Venant-Lévy-Mises*. În cadrul acestei teorii se presupune de asemenea că este satisfăcută condiția de plasticitate a lui *Mises*. (De fapt *S. Venant* și *M. Lévy* au atașat la legea lor de curgere condiția lui *Tresca* care duce însă la complicații de calcul și pe de altă parte, cu această condiție relația (0.8) nu este în concordanță cu legea de curgere respectivă [166]). Dacă starea de tensiune este astfel încît $J_2 < \tau_s^2$ materialul nu se deformează deloc. El se poate deforma și devine plastic numai dacă $J_2 = \tau_s^2$. Un material de acest tip se numește « plastic rigid ». În timpul descărcării un asemenea material se comportă de asemenea rigid.

În teoria lui *S. Venant-Lévy-Mises* se face aceeași presupunere ca și mai sus: viteza de deformare (care de data aceasta coincide cu cea plastică) este proporțională cu deviatorul tensiunilor

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \mu\, s_{ij}. \tag{0.18}$$

Factorul de proporționalitate μ se elimină tot cu ajutorul condiției de plasticitate a lui *v. Mises*. Se obține ușor

$$\mu^2 = \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij}}{2\tau_s^2} \tag{0.19}$$

Relațiile (0.18) cuprind în ele și condiția de incompresibilitate. Corpul *S. Venant-Lévy-Mises* este deci incompresibil.

O observație importantă, datorită lui *Hohenemser* și *Prager* [79] este aceea că ambele teorii de mai sus, deși în ele intervine viteza de deformare, nu reflectă în nici un fel proprietățile vîscoase ale materialului. Aceasta rezultă imediat, dacă se ține seama de expresiile factorilor de proporționalitate. Ambele aceste grupuri de relații sînt omogene în derivatele în raport cu timpul. Deci ambele grupuri se pot scrie fie sub formă diferențială, timpul neinterve-

Scanned with OKEN Scanner

nind explicit în derivate, fie sub forma de mai sus, dar în care derivatele pot fi considerate ca derivate în raport cu un parametru oarecare ce creşte proporţional cu timpul.

Teoria lui Hencky-Iliuşin [75], [92]. Ambele teorii de mai sus sînt teorii « diferenţiale », în care relaţiile dintre tensiuni şi deformaţii sînt date sub formă diferenţială. În practică se pot însă aplica de multe ori (în bună concordanţă cu experienţa) şi teorii în care relaţiile dintre tensiuni şi deformaţii sînt date sub formă întreagă. Teoriile în care relaţiile dintre tensiuni şi deformaţii sînt date sub formă diferenţială, se numesc teorii ale « curgerii plastice »; cele în care aceste relaţii sînt date sub formă întreagă se numesc teorii ale « deformării plastice ». În general, primele sînt aplicabile cînd deformaţiile plastice sînt mari, iar celelalte cazului cînd deformaţiile plastice sînt mici. Teoria lui *Hencky*, dezvoltată apoi de *Iliușin*, este o teorie a deformării plastice.

Conform acestei teorii, deviatorii tensiunilor şi deformaţiilor sînt proporţionali:

$$e_{ij} = \nu s_{ij}. \tag{0.20}$$

Factorul de proporţionalitate ν depinde în general de invarianţii celor doi deviatori. Considerînd că acest factor depinde numai de invarianţii pătratici ai deviatorilor, obţinem uşor

$$\nu = \frac{E}{S}. \tag{0.21}$$

Între invarianţii E şi S există o relaţie generală (0.9) care caracterizează proprietăţile mecanice ale materialului. În stadiul elastic, cînd $E \leqslant \gamma_s$, vom avea

$$S = 2GE \tag{0.22}$$

unde G este modulul de forfecare.

În stadiul plastic, cînd $E \geqslant \gamma_s$, materialul poate fi considerat perfect plastic

$$S = \tau_s \tag{0.23}$$

sau consolidabil, în care caz satisface o relaţie de tipul relaţiei (0.9) în care funcţiunea $\mathcal{F}$ este strict crescătoare. Dacă materialul este consolidabil liniar, este satisfăcută relaţia

$$S = \tau_s + 2G_1 (E - \gamma_s) \tag{0.24}$$

unde $2G_1$ este o constantă numită modulul de consolidare.

Dacă consolidarea este exponențială, este satisfăcută relația

$$S = KE^{\mu} \tag{0.25}$$

unde K și μ sînt constante.

În cadrul teoriei lui Hencky-Iliușin se consideră că volumul este compresibil elastic și deci este satisfăcută condiția (0.15). Cîteodată, pentru simplificarea calculelor se presupune că materialul este incompresibil și deci satisface relația $\varepsilon_{ii} = 0$; aceasta se poate face în special în cazurile cînd deformațiile elastice sînt mici și pot fi neglijate în raport cu cele plastice; atunci se poate neglija și deformarea elastică a volumului.

Toate teoriile de mai sus sînt teorii statice. În anumite condiții și pentru anumite materiale aceste teorii furnizează rezultate în bună concordanță cu experiența. După cum vom vedea în prezenta lucrare, aceste teorii au fost aplicate de mai mulți autori și problemelor dinamice. În această privință însă nu există încă suficiente lucrări experimentale și deci nu se poate decide deocamdată în ce cazuri aceste teorii pot fi aplicate și problemelor dinamice, mai ales că majoritatea lor sînt aplicabile numai pentru cazul încărcărilor simple.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

PROPAGAREA UNDELOR PLASTICE ÎN BARE SEMI-INFINITE

§ 1. STABILIREA ECUAȚIILOR ÎN COORDONATE LAGRANGE

Să considerăm o bară semi-infinită, de secțiune transversală oarecare și al cărei material este presupus deocamdată oarecare. Vom alege axele de coordonate astfel încît originea să fie la capătul barei, iar axa Ox pozitivă să fie dirijată de-a lungul ei. Vom presupune că particulele barei sînt în repaus pentru $t < 0$. La momentul $t = 0$, vom lovi capătul barei cu un corp rigid, astfel încît pentru $t > 0$, particulele barei nu mai sînt în repaus. Această presupunere aproximează bine situația reală, cînd materialul barei este relativ moale (aluminiu, aramă, etc), în comparație cu materialul corpului care lovește (oțel călit). În experiențe uneori se inversează situația: bara dintr-un material oarecare este lovită, cu o anumită viteză, de un perete masiv (o placă foarte groasă de blindaj). În acest caz deformația plăcii este, de cele mai multe ori, cu totul neglijabilă. Dacă ea totuși nu este neglijabilă, o putem introduce destul de ușor în calcule. Vom mai atrage în sfîrșit atenția, că din cauza timpului foarte scurt de lovire, de cele mai multe ori forțele de inerție nu permit flambarea barei. În cele ce urmează noi vom presupune totdeauna că flambajul nu are loc.

Vom face presupunerea simplificatoare că prin lovire, secțiunile transversale, plane înainte de lovire, rămîn plane și după lovire. Deci deplasările în direcția axei, ale moleculelor dintr-o aceeași secțiune, sînt egale. Secțiunea barei va fi totuși presupusă destul de redusă, astfel încît este posibilă și deplasarea transversală a particulelor barei. Cazul barelor groase va fi considerat în Cap. VII. În afară de aceasta, deocamdată vom mai presupune că influența vitezei

de deformare este neglijabilă, în sensul că putem considera că tensiunea este funcţie numai de deformaţie.

Secţiunea ce se află în momentul iniţial la distanţa x de capătul barei, se va afla într-un moment oarecare t la distanţa $x' = x + u$, u fiind deplasarea secţiunii. Deci $dx' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$. Vom nota cu A_0 aria secţiunii iniţiale şi cu A aria aceleeaşi secţiuni la un moment oarecare t. Întrucît vom presupune materialul incompresibil, avem $(1 + \varepsilon)\, \rho A = \rho_0 A_0$, unde ρ_0 şi ρ sînt masele specifice la momentul iniţial şi respectiv la momentul t, iar $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$. Ecuaţia diferenţială de mişcare va fi $\rho A\, dx' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma\, A_0)\, dx$, sau

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \tag{1.1}$$

unde σ este tensiunea (efortul raportat la secţiunea iniţială a barei). Prin convenţie vom considerea că σ şi ε sînt pozitivi pentru întindere şi negativi pentru compresiune. Totuşi în unele calcule efective ele vor fi luate în valoare absolută, semnul fiind evident.

La ecuaţia (1.1) trebuie adăugată şi relaţia care există între tensiune şi deformaţie, relaţie ce caracterizează după cum vom vedea proprietăţile dinamice ale materialului respectiv

$$\sigma = \sigma(\varepsilon). \tag{1.2}$$

În teoria plasticităţii, funcţia $\sigma(\varepsilon)$ este de obicei monoton crescătoare în raport cu argumentul ε. Nu vom considera cazul funcţiilor $\sigma(\varepsilon)$ descrescătoare, adică nu vom considera cazul materialelor desconsolidabile. Vom presupune chiar că funcţia $\sigma(\varepsilon)$ este strict crescătoare, adică materialul va fi presupus consolidabil. Vom presupune că concavitatea curbei $\sigma \sim \varepsilon$ este dirijată către axa deformaţiilor crescătoare. În cazul cînd concavitatea este dirijată invers, problema se complică căci există posibilitatea apariţiei undelor de şoc (v. Cap. III).

Introducînd (1.2) în (1.1) obţinem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \tag{1.3}$$

În (1.3) $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ caracterizează proprietatea mecanică a materialului respectiv într-un anumit stadiu de deformare. În stadiul elastic, $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ este constant şi egal cu E (modulul de elasticitate). În stadiul

Scanned with OKEN Scanner

plastic $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ este în general variabil, depinzînd de ε. Să punem $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = T(\varepsilon)$. Ecuaţia (1.3) se scrie atunci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T(\varepsilon)}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.4}$$

Aceasta este o ecuaţie de tipul ecuaţiei undelor, în care $c(\varepsilon) = \sqrt{\frac{T(\varepsilon)}{\rho_0}}$ este viteza variabilă de propagare a undei. Mişcarea secţiunilor transversale ale barei, care corespunde soluţiei ecuaţiei (1.4) determinată într-un domeniu oarecare de variaţie al variabilelor t şi x şi care posedă derivate de primul ordin continue în acest domeniu, se numeşte *undă*. Locul geometric al punctelor ce despart două unde şi care se deplasează de-a lungul barei în decursul timpului, se numeşte *front*; pe frontul undelor, tensiunea σ şi viteza v a particulelor sînt continue, dar derivatele lor sînt discontinue. Dacă pe frontul undelor sînt discontinue chiar σ, ε şi v, atunci undele respective se numesc « de şoc » (v. Cap. III).

Dacă lovitura la capătul barei nu este prea puternică, adică dacă prin această lovitură tensiunea produsă în bară nu depăşeşte limita de elasticitate a materialului respectiv, în bară se vor propaga unde elastice, directe şi de încărcare, cu viteza constantă $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$. Undele elastice sînt numite cîteodată şi «unde acustice»; vitezele respective de propagare practic coincid (vezi de exemplu [139]). Dacă însă tensiunea în bară depăşeşte limita de elasticitate, începînd de la capătul lovit, în bară se vor propaga unde plastice (unde pe care tensiunea depăşeşte limita de elasticitate) cu viteza variabilă $c(\varepsilon) = \sqrt{\frac{T(\varepsilon)}{\rho_0}}$. Pentru materialele considerate în acest capitol, curbele $\sigma \sim \varepsilon$ avînd concavitatea dirijată spre ε crescător, $T(\varepsilon) < E$ şi deci undele plastice se vor propaga cu viteză mai mică decît cele elastice. De obicei $T(\varepsilon)$ este o funcţie descrescătoare de ε şi deci cu cît deformaţiile vor fi mai mari, cu atît viteza de propagare a undei respective va fi mai mică. Deci pentru materialele considerate în acest capitol, pe măsură ce se propagă, undele apărute prin lovire vor avea tendinţa de a se rarefia în bară (în sensul că distanţa dintre fronturi va creşte în timpul propagării). Consideraţii cu totul similare cu cele de mai sus, pot fi făcute şi referitor la propagarea undelor longitudinale în fire rectilinii, întinse brusc. În acest caz, firele sînt considerate bare, cu aria secţiunii transversale foarte redusă.

Problema, aşa cum a fost expusă mai sus, a fost considerată de *H. A. Rahmatulin* în [170] precum şi de *Th. Kármán* şi *Pol Duwez* în [100].

§ 2. SOLUŢIA LUI KÁRMÁN — DUWEZ

Kármán şi *Duwez* [100] au considerat cazul în care la capătul barei apare brusc (instantaneu) la momentul $t = 0$ o presiune mare datorită unei lovituri. Această presiune rămîne ulterior constantă. Condiţiile iniţiale vor fi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pentru } t = 0 \tag{1.5}$$

iar condiţiile la limită

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} &= \text{const pentru } x = 0 \text{ şi } t > 0 \\ \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \text{ pentru } x = \infty \text{ şi orice } t. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Presupunînd că bara a fost în repaus la momentul iniţial, obţinem deci

$$\begin{aligned} u &= v_1 t \quad \text{pentru } x = 0 \\ u &= 0 \quad \text{pentru } x = \infty. \end{aligned} \tag{1.6'}$$

Se presupune deci că în timpul loviturii, capătul barei se mişcă cu viteza constantă de lovire v_1. Să căutăm pentru condiţiile la limită (1.6') o soluţie a ecuaţiei (1.4). *Kármán* şi *Duwez* propun o primă soluţie particulară de forma

$$u = v_1 \left[t + \frac{x}{c_1} \right] \tag{1.7}$$

în care c_1 are dimensiunile unei viteze şi este deocamdată o constantă arbitrară. O asemenea soluţie satisface evident ecuaţia (1.4) şi condiţiile la limită (1,6'). Deformaţia corespunzătoare deplasării (1.7) este $\varepsilon_1 = \frac{v_1}{c_1}$.

Să căutăm o a doua soluţie particulară punînd

$$\frac{T(\varepsilon)}{\rho_0} = \frac{x^2}{t^2}. \tag{1.8}$$

Întrucît $T(\varepsilon)$ este o funcţie dată, rezultă din (1.8) că în acest caz ε este o funcţie numai de $\xi = \frac{x}{t}$. Să presupunem deci, în general, că $\varepsilon = f(\xi)$, unde f este o funcţie deocamdată nedeterminată.

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta revine la a presupune că pe dreptele $\frac{x}{t} = \text{const.}$, deformația ε este constantă. Să determinăm acum funcția $f(\xi)$ ținînd seama de ecuația de mișcare.

Deplasarea este dată de

$$u = -\int_{\infty}^{x} \frac{\partial u}{\partial x}\, dx = -\int_{\infty}^{x} f(\xi)\, dx \tag{1.9}$$

sau

$$u = -t\int_{\infty}^{\xi} f(\xi)\, d\xi. \tag{1.10}$$

Introducînd (1.10) în (1.4) obținem două posibilități. Sau este satisfăcută relația

$$\rho_0 \xi^2 = T \tag{1.11}$$

sau relația

$$f'(\xi) = 0. \tag{1.12}$$

Dacă (1.12) este satisfăcută ne reîntoarcem la soluția particulară (1.7); dacă (1.11) este satisfăcută revenim la (1.8). Deci numai aceste două soluții particulare sînt posibile dacă presupunem că ε este funcție doar de ξ. În această presupunere, soluția completă a problemei se obține prin combinarea celor două soluții particulare:

a) pentru $0 < x \leqslant c_1 t$ deformația este constantă și egală cu ε_1 (c_1 este viteza de propagare a frontului undei plastice, pe care deformația este maximă și egală cu ε_1).

b) pentru $c_1 t < x \leqslant c_0 t$ este satisfăcută relația (1.8)

c) pentru $x > c_0 t$, $\varepsilon = 0$.

Distribuția lui ε în funcție de ξ este reprezentată schematic în fig. 7. Frontul undelor elastice se propagă cu viteza c_0, iar frontul undei plastice cu viteza c_1. Între cele două fronturi viteza este variabilă. Pentru o anumită deformație ε, corespunde o anumită viteză $c(\varepsilon) = \sqrt{\frac{T(\varepsilon)}{\rho_0}}$.

Autorii își propun să determine viteza c_1 a frontului undei plastice, precum și deformația maximă ε_1 ca funcție de viteza de impact v_1. Din (1.10) rezultă pentru capătul barei

$$v_1 = \frac{u(0,t)}{t} = -\int_{\infty}^{0} f(\xi)\, d\xi. \tag{1.13}$$

Integrala din (1.13) reprezintă o arie care (vezi fig. 7) poate fi calculată și prin integrala

$$v_1 = \int_0^{\varepsilon_1} \xi \, d\varepsilon. \tag{1.14}$$

Introducînd pe ξ din (1.11) obținem

$$v_1 = \int_0^{\varepsilon_1} \sqrt{\frac{T(\varepsilon)}{\rho_0}} \, d\varepsilon. \tag{1.15}$$

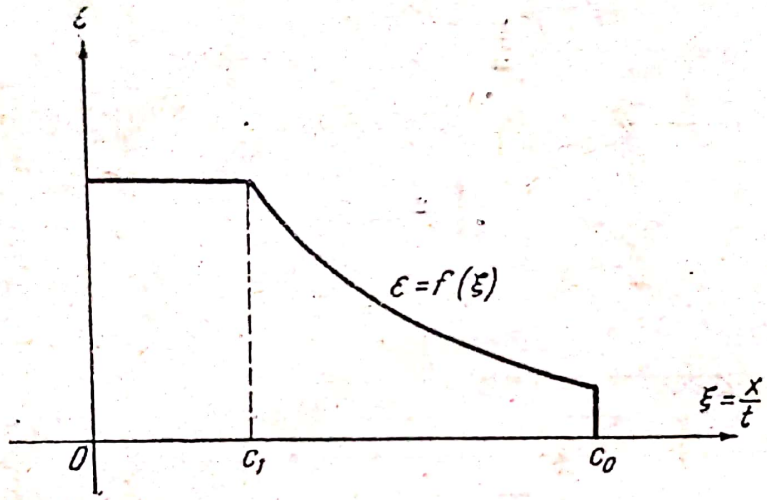

Fig. 7

Ecuația (1.15) determină deformația ε_1 ca funcție de viteza de impact v_1, căci $T(\varepsilon)$ este o funcție presupusă cunoscută.

Dacă deformația maximă nu depășește limita de elasticitate, atunci $T = E = \text{const}$ și $v_1 = \varepsilon_1 c_0$. În acest caz tensiunea va fi dată de

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 = \rho_0 v_1 c_0. \tag{1.16}$$

Ecuația (1.16) este relația obișnuită care se utilizează pentru calcularea tensiunii în corpurile elastice lovite cu viteza v_1. În acest caz, în bară vor exista două regiuni, într-una (în care $x > c_0 t$) avem $\varepsilon = \sigma = 0$, iar în cealaltă (în care $x \leqslant c_0 t$) avem $\sigma = \rho_0 v_1 c_0$, deformația fiind dată de legea lui *Hooke*.

Dacă în urma loviturii, tensiunea depășește limita de elasticitate a materialului respectiv, vom avea în bară trei regiuni: pentru $x > c_0 t$, $\sigma = 0$; pentru $c_1 t \leqslant x \leqslant c_0 t$ tensiunea crește treptat de la $\sigma = 0$, pînă la valoarea maximă $\sigma = \sigma_1$; pentru $x < c_1 t$, deformația este dată de (1.15), iar tensiunea corespunzătoare este dată de

Scanned with OKEN Scanner

(1.2). În mod similar se calculează tensiunea și în intervalul $c_1 t \leqslant x \leqslant c_0 t$.

Se poate întîmpla ca pentru anumite materiale $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ să tindă către zero o dată cu creșterea lui ε, și pentru o valoare particulară a lui ε materialul să se rupă. Mărimea corespunzătoare a vitezei v_1 este considerată de autori ca fiind o anumită viteză limită, iar pentru valoarea particulară respectivă ε_1, a deformației, integrala din (1.15) ar avea o valoare maximă. Dacă viteza de impact depășește valoarea limită, materialul se rupe instantaneu.

În sprijinul teoriei s-au făcut și o serie de experiențe. Ele au fost făcute pe fire de cupru recopt, montate vertical. Firele erau deformate longitudinal cu ajutorul unei lovituri provocate cu un ciocan. Scopul experiențelor a fost verificarea a trei rezultate obținute teoretic. Ele erau: existența frontului undei plastice, relația dintre viteza de lovire v_1 și deformația ε_1 după trecerea frontului undei plastice, și distribuția deformațiilor plastice între unda plastică și unda elastică. Din rezultatele experiențelor, autorii trag concluzia că primele două puncte concordă bine cu experiențele, pe cînd ultimul punct nu este în concordanță cu ele. Această neconcordanță pare că provine din neconsiderarea undei de descărcare (vezi mai departe).

Aparatura descrisă în memoriul lui *Kármán* și *Duwez* este similară cu cea folosită de *J. Hopkinson* [85] cu mult înainte (secolul trecut). *Hopkinson* cercetează însă numai propagarea undelor elastice.

§ 3. SOLUȚIA LUI H. A. RAHMATULIN

a) **Caracteristice.** Pentru rezolvarea problemei puse în § 1 al acestui capitol, *Rahmatulin* [170] începe prin calcularea caracteristicelor ecuației (1.3). Utilizînd notațiile $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ și $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, pentru calculul caracteristicelor ecuației (1.3), se utilizează sistemul

$$c_2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_t}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial x} dx + \frac{\partial u_t}{\partial t} dt = du_t. \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial t} dt = du_x,$$

unde du_x și du_t sînt luate de-a lungul curbei caracteristice căutate.

Să rezolvăm sistemul (1.17) în raport cu derivatele $\frac{\partial u_t}{\partial t}$. $\frac{\partial u_t}{\partial x}$ și $\frac{du_x}{\partial x}$. Obținem [1])

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{c^2 [du_t\ dt - du_x\ dx]}{-dx^2 + c^2\ dt^2},\quad \frac{\partial u_t}{\partial x} = -\frac{c^2\ dt\ du_x + dx\ du_t}{-dx^2 + c^2\ dt^2},\quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{dx\ du_x - dt\ du_t}{-dx^2 + c^2\ dt^2}$$

Pentru a obține ecuația caracteristicelor, adică a curbelor pe care derivatele de mai sus sînt nedeterminate, anulăm numitorul și toți numărătorii. Obținem (semnele superioare și inferioare se corespund):

$$\frac{dx}{dt} = \pm c, \qquad \frac{du_t}{du_x} = \pm c, \tag{1.18}$$

sau

$$\frac{dx}{dt} = \pm c,\ u_t = \pm \int c\,(u_x)\,du_x + k = \pm \psi\,(u_x) + k. \tag{1.19}$$

Primul grup de relații din (1.19) reprezintă propriu-zis, caracteristicele (suprafețele de discontinuitate), iar cel de al doilea grup sînt relațiile diferențiale ce au loc pe aceste caracteristice. Unii autori (*Caius Iacob* [90] pag. 490) numesc primele relații «caracteristice Cauchy», iar ambele grupuri de relații luate împreună «caracteristice Monge».

Să adăugăm acum planului (x, t), un plan ajutător (u_x, u_t) (fig. 8). *Rahmatulin* presupune că în timpul lovirii, la capătul barei este valabilă legea de variație a presiunii sau a deformației. Deci condițiile la limită sînt

$$\sigma\,(u_x) = p\ (t) \text{ sau } u_x = \varepsilon\ (t) \text{ pentru } x = 0 \tag{1.20}$$

iar condițiile inițiale: $u_t = u_x = 0$ pentru $t < 0$.

Din aceste condiții rezultă că domeniului din planul (x, t) cuprins între axa Ox și caracteristica $x = c\ (0)\ t$ îi corespunde în planul (u_x, u_t) originea: $u_x = u_t = 0$. Pentru acest domeniu, caracteristicele din planul (x, t) sînt dreptele $x = c\ (0)\ t$ + const, paralele cu frontul undelor. Prin acest domeniu trec însă și caracteristicele de pantă negativă $x = -c\ (0)\ t$ + const. Întrucît în acest domeniu vitezele și deformațiile sînt nule, $u_t = \sigma = 0$, relația diferențială (1.19) atașată caracteristicelor de pantă negativă, devine

$$u_t = -\int_0^{u_x} c\,(u_x)\,du_x = \pm \psi\,(u_x) \tag{1.19'}$$

---

[1]) În acest paragraf vom utiliza parantezele rotunde exclusiv pentru a indica argumentul unei funcții.

Scanned with OKEN Scanner

căci constanta este nulă. Deci dacă în bară se propagă unda directă, în fiecare secţiune a ei, viteza şi deformaţia sînt legate prin relaţia (1.19′). Atragem atenţia că în acest caz constanta k este nulă numai dacă materialul barei era în stare nedeformată înainte de trecerea acestei unde.

Să trecem acum la domeniul cuprins între dreapta $x = c(0)\,t$ şi axa Ot. Din (1.20) rezultă că pentru orice punct de pe axa Ot cunoaştem deformaţia respectivă $u_x = \varepsilon(t)$. Deci unui punct m_3 de pe axa Ot îi corespunde în planul $(u_x,\ u_t)$ punctul M_3 care

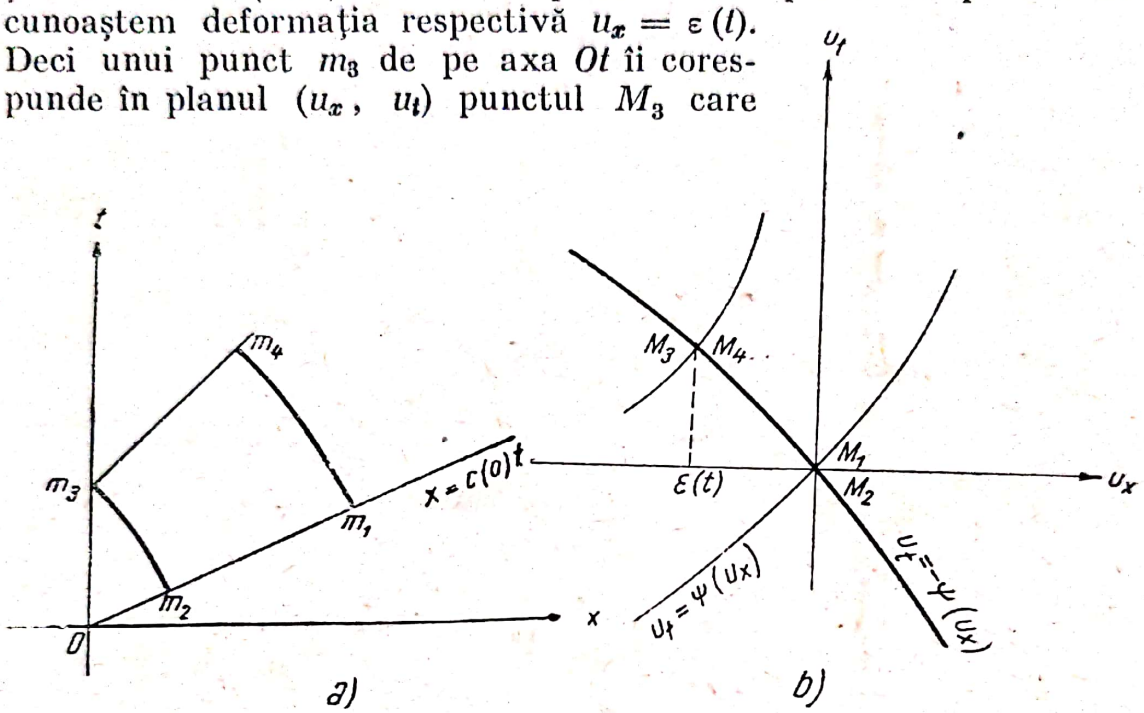

Fig. 8

este intersecţia dreptei $u_x = \varepsilon(t)$ cu curba de pantă negativă $u_t = -\psi(u_x)$. Această curbă este corespondenta în planul $(u_x,\ u_t)$ a caracteristicei m_3m_2 din planul $(x,\ t)$ şi ea va trece neapărat prin origine, căci m_2 corespunde originii din planul $(u_x,\ u_t)$. Punctul corespunzător de pe curba $u_t = -\psi(u_x)$, adică originea, va fi notat cu M_2. În fig. 8 am ţinut seama de faptul că tensiunea $p(t)$ fiind o compresiune, $p < 0$ şi $\varepsilon < 0$. Să considerăm punctul m_4 ce se obţine din intersecţia caracteristicei m_3m_1 de pantă pozitivă, cu caracteristica m_1m_4 de pantă negativă. Întrucît caracteristicelor de pantă negativă din planul $(u_x,\ u_t)$ le corespund caracteristice de pantă negativă din planul $(x,\ t)$, şi întrucît punctele M_1 şi M_2 coincid cu originea din planul $(u_x,\ u_t)$, este clar că punctului m_4 din planul $(x,\ t)$ îi corespunde punctul M_4 ce coincide cu M_3. Deci oricărui punct de pe caracteristica m_3m_4 îi corespunde un acelaşi punct $M_3 = M_4$ de coordonate u_x şi u_t. Există chiar o

corespondenţă biunivocă între caracteristicele de pantă pozitivă din planul (x, t) şi punctele de pe curba $u_t = -\psi(u_x)$ din planul (u_x, u_t). Rezultă că pe caracteristica m_3m_4, u_x, u_t şi $\sigma(u_x)$ sînt constante, adică această caracteristică este o dreaptă. Deci toate caracteristicele de pantă pozitivă din planul (x, t) sînt drepte

$$x = c(u_x)[t - t_0]. \tag{1.21}$$

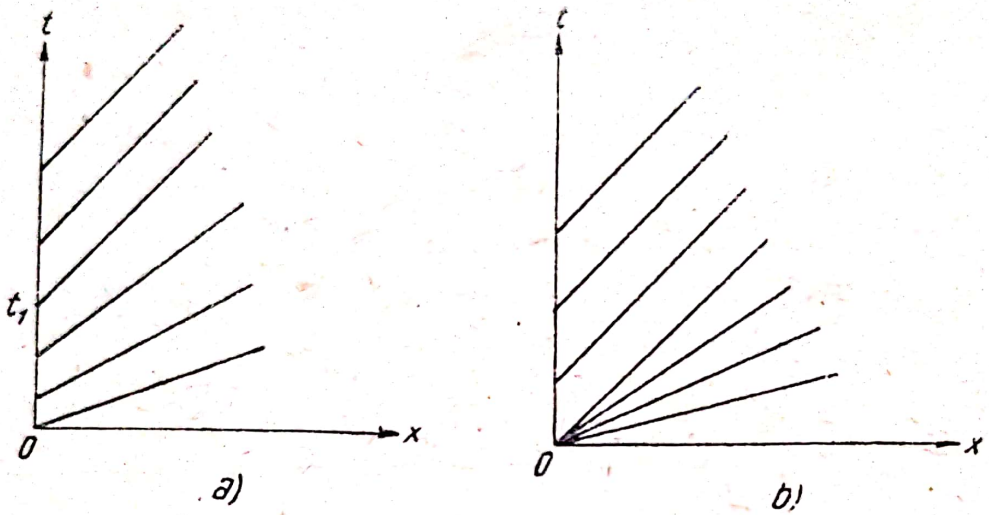

Fig. 9

unde t_0 este un punct oarecare de pe axa Ot, în care este dată deformaţia, din relaţia (1.20):

$$\varepsilon = \varepsilon(t_0). \tag{1.22}$$

Eliminînd t_0 din aceste două relaţii, obţinem ecuaţia funcţională

$$\varepsilon = \varepsilon\left(t - \frac{x}{c(\varepsilon)}\right) \tag{1.23}$$

care determină pe ε ca funcţie de x şi de t. Este determinată deci şi tensiunea în fiecare secţiune şi la orice timp. Vitezele u_t se determină apoi din (1.19′). Astfel a fost rezolvată de către *Rahmatulin* problema în domeniul de încărcare.

Presiunea $p(t)$ poate varia în diferite moduri. Particularizînd această funcţie se poate obţine soluţia problemei prin construirea fasciculului de caracteristice de pantă pozitivă din planul (x, t). Dacă presiunea creşte monoton în intervalul $0 \leqslant t \leqslant t_1$, iar apoi rămîne constantă, caracteristicele corespunzătoare (1.21) sînt figurate în fig. 9, *a*. Este clar că viteza de propagare la început descreşte iar apoi rămîne constantă.

Dacă t_1 este foarte mic şi se poate considera zero, încărcarea este numită instantanee. Atunci fasciculul divergent de caracteristice din

Scanned with OKEN Scanner

fig. 9 *a*, devine un fascicul ce trece prin origine, iar (1.21) devine

$$x = t \cdot c(\varepsilon). \qquad (1.24)$$

De aci rezultă că pentru încărcări instantanee, ε nu depinde decît de raportul $\frac{x}{t}$ şi astfel revenim la soluţia din paragraful precedent.

b) **Unda de descărcare.** Cele spuse pînă acum se referau numai la procesul de încărcare, cînd presiunea apărută brusc sau monoton la capătul barei rămînea ulterior constantă. În aceeaşi lucrare [170] *H. A. Rahmatulin* a considerat şi problema descărcării, pentru cazul cînd presiunea apare brusc şi apoi scade monoton la zero după o lege dată. Atît timp cît presiunea la capătul barei este monoton crescătoare, în bară are loc procesul de încărcare; cînd presiunea a devenit descrescătoare, în bară are loc procesul de descărcare. Începutul descărcării corespunde atingerii presiunii maxime la capătul barei.

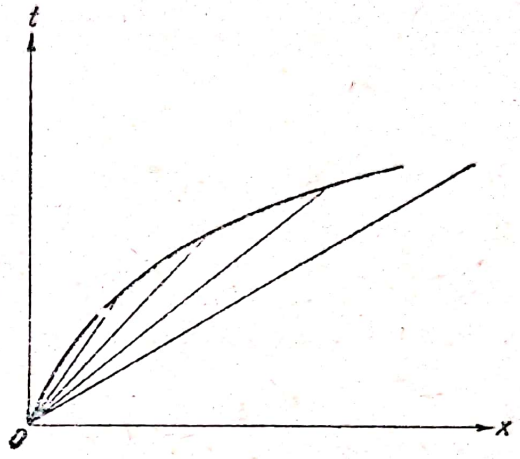

Fig. 10

În timpul încărcării, în fiecare secţiune a barei, relaţia dintre σ şi ε este cea dată de curba $\sigma \sim \varepsilon$ caracteristică fiecărui material (vezi Introducerea). Descărcarea însă va fi considerată un proces perfect elastic şi vom presupune că ea are loc, pe fig. 4 de-a lungul segmentului *BC*. Descărcarea începe în punctul *B*, dar în fiecare secţiune a barei descărcarea va începe de la un alt punct *B* de pe diagrama $\sigma \sim \varepsilon$. Greutatea în problema descărcării, constă tocmai în faptul că în fiecare secţiune descărcarea începe de la o altă tensiune maximă şi de la o altă deformaţie maximă. Planul (x, t) va fi împărţit (fig. 10) în două regiuni, într-una are loc încărcarea, iar în alta descărcarea. Aceste două domenii vor fi despărţite printr-o curbă pe care o vom numi undă de descărcare sau unda lui Rahmatulin. Această undă nu este totdeauna un loc geometric cu o singură dimensiune; depinzînd de încărcarea de la capătul barei ea poate fi şi un loc geometric ce posedă o arie etc. Prin definiţie deci, unda de descărcare este locul punctelor din planul (x, t) care corespund tensiunii maxime din fiecare secţiune a barei. Deasupra ei (în planul (x, t)) are loc descărcarea, iar dedesubt, încărcarea.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru secţiunea care se află la distanţa x de capătul barei, situaţia va fi deci următoarea: la timpul $t = \frac{x}{c_0}$ scurs de la apariţia perturbaţiei la capătul barei, această perturbaţie atinge acea secţiune. Din acel moment deformaţia creşte şi îşi atinge valoarea maximă la timpul $t = f(x)$, cînd în acea secţiune a ajuns unda de descărcare. Apoi deformaţia descreşte numai cu partea elastică a ei, care depinde de coordonata x şi de valoarea maximă a presiunii de la capătul barei (deci de punctul B de pe fig. 4). Mai sus am notat cu

$$t = f(x) \tag{1.25}$$

ecuaţia în planul (x,t) a undei de descărcare, ecuaţie care nu este cunoscută apriori.

Să deducem acum ecuaţiile diferenţiale care descriu mişcarea după trecerea undei de descărcare. Să notăm cu $\varepsilon_m(x)$ şi $\sigma_m(x)$ deformaţia şi tensiunea pe unda de descărcare, în secţiunea x. Indicele m reaminteşte că pe unda de descărcare, în orice secţiune x, deformaţia şi tensiunea sînt maxime. După trecerea undei de descărcare, materialul se comportă elastic, satisfăcînd relaţia

$$\sigma = \sigma_m(x) + E[\varepsilon - \varepsilon_m(x)] \tag{1.26}$$

unde $\sigma_m(x)$ şi $\varepsilon_m(x)$ sînt coordonatele punctului B (fig. 4). Este evident că σ, σ_m, ε şi ε_m depind şi de timp, iar σ şi ε şi de x. Pentru simplificarea scrierii, aceste argumente nu au mai fost trecute. În σ_m şi ε_m, este evident că x şi t nu sînt variabile independente, între ele existînd relaţia (1.25). Introducînd (1.26) în (1.1), obţinem ecuaţia de mişcare în domeniul descărcării:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \sigma_m(x)}{\partial x} - c_0^2 \frac{\partial \varepsilon_m(x)}{\partial x}. \tag{1.27}$$

Deci în regiunea ce se află sub unda de descărcare, trebuie rezolvată ecuaţia (1.3), iar în regiunea de deasupra ei, ecuaţia (1.27). Dificultatea problemei constă, după cum am mai spus, în faptul că ecuaţia (1.25) a undei de descărcare nu este cunoscută apriori.

c) **Problema inversă.** Să presupunem că ecuaţia (1.25) a undei de descărcare este dată. Să arătăm că fiecărei unde de descărcare, satisfăcînd anumite condiţii, îi corespunde o încărcare la capătul barei, ce scade apoi în timp.

Soluţia generală a ecuaţiei (1.27) este de forma

$$u = u_0(x) + F_1(x + c_0 t) + F_2(c_0 t - x) \tag{1.28}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$u_0 = -\frac{1}{E}\int_0^x [\sigma_m(x) - \varepsilon_m(x)\,E]\,dx. \tag{1.29}$$

Soluția particulară $u_2 = F_2(c_0 t - x)$ corespunde undei ce se propagă în sensul axei Ox pozitive (unde directe), iar soluția $u_1 = F_1(c_0 t + x)$ undei ce se propagă în celălalt sens (inverse).

Rahmatulin presupune că pe unda de descărcare, derivatele prime ale lui u sînt continui. Rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_m(x) \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial t} = -\psi(\varepsilon_m(x))$$

unde $\frac{\partial u}{\partial x}$ şi $\frac{\partial u}{\partial t}$ sînt calculaţi din (1.28), iar $\varepsilon_m(x)$ şi $\psi(\varepsilon_m(x))$ din soluția ecuației (1.3). Obţinem deci

$$\varepsilon_m(x) - \frac{\sigma_m(x)}{E} + F_1'(c_0 f(x) + x) - F_2'(c_0 f(x) - x) = \varepsilon_m(x)$$

$$c_0 F_1'(c_0 f(x) + x) + c_0 F'_2(c_0 f(x) - x) = -\psi(\varepsilon_m(x))$$

sau

$$\begin{aligned} F_1'(c_0 f(x) + x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_m(x)}{E} - \frac{\psi(\varepsilon_m(x))}{c_0}\right] \\ F_2'(c_0 f(x) - x) &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_m(x)}{E} + \frac{\psi(\varepsilon_m(x))}{c_0}\right] \end{aligned} \tag{1.30}$$

Să derivăm aceste relaţii în raport cu x. Obţinem deci pe unda de descărcare

$$\begin{aligned} [c_0 f'(x) + 1]\,F_1''(c_0 f(x) + x) &= \frac{c}{2c_0}\left[\frac{c}{c_0} - 1\right]\frac{d\varepsilon_m(x)}{dx} \\ [c_0 f'(x) - 1]\,F_2''(c_0 f(x) - x) &= -\frac{c}{2c_0}\left[\frac{c}{c_0} + 1\right]\frac{d\varepsilon_m(x)}{dx} \end{aligned} \tag{1.31}$$

căci $\frac{1}{E}\frac{d\sigma_m}{d\varepsilon_m} = \frac{c^2}{c_0^2}$ şi $\frac{d\psi}{d\varepsilon_m} = \frac{du_t}{du_x} = c$.

Să determinăm din (1.28) variaţia în timp a deformaţiei în domeniul de deasupra undei de descărcare. Obţinem

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} = c_0\,[F_1''(c_0 t + x) - F_2''(c_0 t - x)].$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind pentru viteza undei de descărcare notaţia

$$b(x) = \frac{1}{f'(x)} \tag{1.32}$$

şi utilizînd pe (1.31) formula de mai sus devine

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = cb \frac{c+b}{c_0^2 - b^2} \frac{d\varepsilon_m}{dx}. \tag{1.33}$$

Să facem presupunerea că unda de descărcare se propagă mai repede decît undele plastice, dar mai încet decît cele elastice. În cele ce urmează vom presupune deci că

$$c < b < c_0. \tag{1.34}$$

În această presupunere, din relaţia (1.33) rezultă că $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ şi $\frac{d\varepsilon_m}{dx}$ sînt de acelaşi semn. Să găsim acum acest semn. Din (1.24) şi (1.25) rezultă $c(\varepsilon_m(x)) = \frac{x}{f(x)}$, sau prin derivare

$$\frac{d\varepsilon_m}{dx} = \frac{b-c}{bf} \frac{1}{\frac{dc}{d\varepsilon}}. \tag{1.35}$$

Dar pentrucă viteza c scade cu creşterea lui $|\varepsilon|$, din (1.35) şi (1.34) rezultă:

$$\begin{aligned} &-\text{sau } \varepsilon_m(x) > 0 \text{ şi atunci } \frac{d\varepsilon_m(x)}{dx} < 0 \\ &-\text{sau } \varepsilon_m(x) < 0 \text{ şi atunci } \frac{d\varepsilon_m(x)}{dx} > 0. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Să introducem acum (1.35) în (1.33), obţinem

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{b^2 - c^2}{c_0^2 - b^2} \frac{c}{f} \frac{1}{\frac{dc}{d\varepsilon}}. \tag{1.37}$$

De aci rezultă că deasupra undei de descărcare, într-o vecinătate a ei, pentru o lovitură de întindere ($\varepsilon_m > 0$) avem o scădere a deformaţiilor de întindere, iar pentru compresiune ($\varepsilon_m < 0$) o scădere a deformaţiei de compresiune. Deci în ambele cazuri avem un proces de descărcare

$$\varepsilon_m > 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} < 0 \qquad \varepsilon_m < 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} > 0. \tag{1.38}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste inegalităţi arată că fiecărei unde de descărcare, presupusă dată, şi care satisface (1.34), îi corespunde o încărcare la capătul barei care scade apoi în timp. Aceasta este prima parte a demonstraţiei existenţei undei de descărcare. În partea a doua a demonstraţiei, trebuie să demonstrăm problema directă; pentru o lege dată de încărcare la capătul barei, să se determine unda de descărcare corespunzătoare, adică forma ei în planul (x, t) şi distribuţia de tensiuni şi deformatii pe ea.

d) **Problema directă.** Să presupunem pentru început că încărcarea este instantanee. În acest caz, evident, unda de descărcare va porni chiar din originea coordonatelor din planul (x,t) şi deformaţia maximă a barei va fi deci ε_m (0). Pentru demonstrarea problemei directe, *Rahmatulin* presupune că diagrama $\sigma \sim \varepsilon$ a materialului respectiv nu se depărtează prea mult de schema lui Prandtl, şi poate fi înlocuită cu ea. În acest caz, în bară se vor propaga: întîi o undă elastică cu viteza c_0, care face ca deformaţia să crească brusc pînă la ε_s ; apoi un fascicul de unde plastice (numite de *Rahmatulin* undele lui Riemann) pe care $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ scade rapid dar deformaţia creşte foarte puţin; în sfîrşit o undă plastică ce se propagă cu viteza constantă $c_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_0}}$ şi pe care deformaţia atinge valoarea maximă. Schematic toate aceste unde sînt de multe ori înlocuite numai prin două: una elastică pe care deformaţia atinge valoarea ε_s, şi una plastică pe care deformaţia atinge valoarea maximă. Fronturile acestor unde, întrucît încărcarea este presupusă instantanee, vor trece prin origine. Prin origine va trece evident şi unda de descărcare. Însă pentrucă ea trebuie să intersecteze undele din cea de a treia categorie, care sînt tot unde ale lui Riemann, coordonatele fiecărui punct al undei de descărcare satisfac relaţia $x = c_1 t$. Rezultă că pentru cazul încărcării instantanee şi al schemei lui Prandtl, ecuaţia undei de descărcare este

$$t = f(x) = \frac{x}{c_1}, \tag{1.39}$$

(deci şi $b = c_1$) şi ea coincide cu unda lui Riemann.

Pentru materialele consolidabile liniar, pe unda de descărcare, între tensiune, deformaţie şi viteza particulelor (v. (1.19)) există relaţiile

$$\sigma_m(x) = \sigma_s + E_1 \left[\varepsilon_m(x) - \varepsilon_s\right]$$
$$\psi(\varepsilon_m) = [c_0 - c_1]\ \varepsilon_s + c_1 \varepsilon_m. \tag{1.40}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să introducem, acum (1.40) în (1.30). Obţinem pe unda de descărcare

$$F_1'\left(\frac{c_0+c_1}{c_1}x\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sigma_s-E_1\varepsilon_s}{E}-\left[1-\frac{c_1}{c_0}\right]\varepsilon_s+\left[\frac{E_1}{E}-\frac{c_1}{c_0}\right]\varepsilon_m(x)\right\}$$
$$F_2'\left(\frac{c_0-c_1}{c_1}x\right)=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\sigma_s-E_1\varepsilon_s}{E}+\left[1-\frac{c_1}{c_0}\right]\varepsilon_s+\left[\frac{E_1}{E}+\frac{c_1}{c_0}\right]\varepsilon_m(x)\right\} \quad (1.41)$$

Să presupunem că legea de scădere a presiunii $p(t)$ la capătul barei este dată sub forma unei serii

$$p=\sum_{n=0}^{\infty}p_n t^n. \quad (1.42)$$

La capătul barei, pe unda de descărcare vom avea deci

$$p_0=\sigma_m(0)$$
$$\varepsilon_m(0)=\varepsilon_s+\frac{p_0-\sigma_s}{E_1}. \quad (1.43)$$

Tot la capătul barei, dar într-un moment oarecare de timp, vom avea din (1.26)

$$\varepsilon(0,t)=\varepsilon_m(0)+\frac{\sum_{n=0}^{\infty}p_n t^n-p_0}{E}. \quad (1.44)$$

Pe de altă parte, din (1.28) şi (1.29) avem

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}=-\frac{p_0}{E}+\varepsilon_m(0)+F_1'(c_0t)-F_2'(c_0t). \quad (1.45)$$

Să ducem acum printr-un punct oarecare al axei Ot, de coordonate $(0, t)$, două caracteristice din domeniul de descărcare, una de pantă pozitivă şi una de pantă negativă. Ele intersectează unda de descărcare respectiv în punctele $M_2(x_2, t_2)$ şi $M_1(x_1, t_1)$. Ţinînd seama de ecuaţiile caracteristicelor şi de (1.39), se obţin relaţiile între coordonatele acestor puncte:

$$\frac{c_0+c_1}{c_1}x_1=c_0t \quad \text{şi} \quad \frac{c_0-c_1}{c_1}x_2=c_0t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd aceste relaţii în (1.41) obţinem

$$F_1'(c_0 t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sigma_s - E_1\varepsilon_s}{E} - \left[1 - \frac{c_1}{c_0}\right]\varepsilon_s + \left[\frac{E_1}{E} - \frac{c_1}{c_0}\right]\varepsilon_m\left(\frac{c_0 c_1}{c_0 + c_1}t\right)\right\}$$

$$F_2'(c_0 t) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\sigma_s - E_1\varepsilon_s}{E} + \left[1 - \frac{c_1}{c_0}\right]\varepsilon_s + \left[\frac{E_1}{E} + \frac{c_1}{c_0}\right]\varepsilon_m\left(\frac{c_0 c_1}{c_0 - c_1}t\right)\right\} \quad (1.46)$$

Introducînd (1.46) în (1.45), obţinem

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{p_0}{E} + \varepsilon_m(0) + \frac{\sigma_s - E_1\varepsilon_s}{E} + \frac{1}{2}\left[\frac{E_1}{E} - \frac{c_1}{c_0}\right]\varepsilon_m\left(\frac{c_0 c_1}{c_0 + c_1}t\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{E_1}{E} + \frac{c_1}{c_0}\right]\varepsilon_m\left(\frac{c_0 c_1}{c_0 - c_1}t\right). \quad (1.47)$$

Să egalăm acum cele două expresii ale lui $\varepsilon(0, t)$, obţinute în (1.44) şi (1.47). Obţinem

$$\frac{\sigma_s - E_1\varepsilon_s}{E} + \frac{1}{2}\left[\frac{E_1}{E} - \frac{c_1}{c_0}\right]\varepsilon_m\left(\frac{c_0 c_1}{c_0 + c_1}t\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{E_1}{E} + \frac{c_1}{c_0}\right]\varepsilon_m\left(\frac{c_0 c_1}{c_0 - c_1}t\right) - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n}{E} = 0. \quad (1.48)$$

Aceasta este o ecuaţie funcţională pentru determinarea lui $\varepsilon_m(x)$. Pentru a-l determina, să presupunem că $\varepsilon_m(x)$ este de forma

$$\varepsilon_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (1.49)$$

în care coeficienţii a_n sînt nedeterminaţi şi-i vom determina din (1.48). Introducînd deci (1.49) în (1.48) şi egalînd coeficienţii aceloraşi puteri ale lui t, obţinem pentru $n \neq 0$;

$$a_n = \frac{p_n}{A\alpha^n - B\beta^n}$$

$$A = \frac{E}{2}\left[\frac{c_1}{c_0} + \frac{E_1}{E}\right], \quad B = \frac{E}{2}\left[\frac{c_1}{c_0} - \frac{E_1}{E}\right], \quad \alpha = \frac{c_0 c_1}{c_0 - c_1}, \quad \beta = \frac{c_1 c_0}{c_1 + c_0}. \quad (1.50)$$

În ceea ce priveşte pe $a_0 = \varepsilon_m(0)$, el se determină din a doua relaţie (1.40) dacă se dă viteza de lovire v_1 la capătul barei:

$$-v_1 = [c_0 - c_1]\varepsilon_s + c_1 a_0. \quad (1.51)$$

Scanned with OKEN Scanner

În felul acesta problema noastră este rezolvată: dată fiind distribuția tensiunilor la capătul barei, se poate obține distribuția de deformații pe unda de descărcare. Sînt cunoscute deci din (1.40) tensiunile precum și vitezele.

Existența undei de descărcare este deci complet demonstrată. Aceste rezultate sînt datorite lui *Rahmatulin*, care a indicat și demonstrația pentru cazul curbei $\sigma \sim \varepsilon$ oarecari. Soluția problemei în acest caz revine la rezolvarea unui sistem de trei ecuații funcționale. În expunerea făcută mai sus, ne-am folosit și de expunerea demonstrației, așa cum se găsește ea în cartea lui *A. A. Iliușin* [92], Cap. VII.

Întrucît unda de descărcare a fost pusă în evidență de *H. A. Rahmatulin*, unii autori (Iliușin, Șapiro etc.) au numit-o «unda lui Rahmatulin».

Presupunînd acum că în fiecare secțiune a barei deformația maximă este găsită, să căutăm deformația remanentă. Pentru secțiunea x ea este $\tilde{\varepsilon}(x) = \varepsilon_m(x) - \varepsilon^e(x) = \varepsilon_m(x) - \frac{\sigma_m(x)}{E}$ sau

$$\tilde{\varepsilon}(x) = \frac{E - E_1}{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \varepsilon_s\right]. \qquad (1.52)$$

Scriind aceste relații sub forma

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{E - E_1}{E}\left[\varepsilon_m(0) - \varepsilon_s + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right]$$

se observă că pentru $\varepsilon_s = \varepsilon_m(0)$, deformația remanentă ε nu este identic nulă, după cum ne-am fi așteptat. *Rahmatulin* explică aceasta prin faptul că există o zonă de propagare a deformațiilor remanente, zonă care tinde către zero împreună cu diferența $\varepsilon_m(0) - \varepsilon_s$. Formula (1.52) ar fi deci aplicabilă numai dacă această zonă, oricît de mică ar fi, ar fi totuși diferită de zero.

e) **Exemplu.** Să considerăm problema lovirii capătului barei, cu un corp rigid de masă m. Ecuația de mișcare a acestui corp va fi

$$m\frac{d^2u(0,t)}{dt^2} = F_0 p.$$

în care F_0 este aria secțiunii transversale inițiale a barei. Acest caz particular a fost considerat tot de *H. A. Rahmatulin* [172].

Formula (1.48) ne furnizează expresia lui p,

$$p = [E - E_1]\varepsilon_s + A\varepsilon_m(\alpha t) - B\varepsilon_m(\beta t). \qquad (1.53)$$

Scanned with OKEN Scanner

Să găsim acum pe $\frac{d^2u(0,t)}{dt^2}$. Din (1.28) rezultă pentru $x = 0$,

$$\frac{du(0,t)}{dt} = c_0 F_1'(c_0 t) + c_0 F_2'(c_0 t). \tag{1.54}$$

Introducînd aici pe (1.46), obţinem

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{x=0} = [c_1 - c_0]\,\varepsilon_s + \frac{1}{2}\left[\frac{c_1^2}{c_0} - c_1\right]\varepsilon_m(\beta t) - \frac{1}{2}\left[\frac{c_1^2}{c_0} + c_1\right]\varepsilon_m(\alpha t). \tag{1.55}$$

Avem deci pentru derivata secundă

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_{x=0} = \frac{\beta}{2}\left[\frac{c_1^2}{c_0} - c_1\right]\varepsilon_m'(\beta t) - \frac{\alpha}{2}\left[\frac{c_1^2}{c_0} + c_1\right]\varepsilon_m'(\alpha t). \tag{1.56}$$

Introducînd (1.53) şi (1.56) în ecuaţia de mişcare, obţinem

$$C\,\varepsilon_m'(\beta t) + D\,\varepsilon_m'(\alpha t) = -F_0[E - E_1]\,\varepsilon_s - F_0 A\,\varepsilon_m(\alpha t) + F_0 B\varepsilon_m(\beta t) \tag{1.57}$$

unde

$$C = \frac{m\beta}{2}\left[c_1 - \frac{c_1^2}{c_0}\right], \qquad D = \frac{m\alpha}{2}\left[c_1 + \frac{c_1^2}{c_0}\right]. \tag{1.58}$$

Vom căuta soluţia ecuaţiei (1.57) de forma (1.49). Obţinem

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \beta^{n-1} t^{n-1} + D\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \alpha^{n-1} t^{n-1} = -F_0[E - E_1]\,\varepsilon_s - FA\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n t^n + FB\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n t^n.$$

Egalînd termenii liberi din ambii membri, obţinem

$$[C + D]\,a_1 = -F_0[E - E_1]\,\varepsilon_s - F_0 a_0\,[A - B].$$

Dar $a_0 = \varepsilon_m(0)$ este cunoscut din condiţiile iniţiale. Deci putem deduce pe a_1:

$$a_1 = -\frac{p_0}{C + D} = -\frac{F_0 p_0\left[c_0^2 - c_1^2\right]}{c_1^2 m\left[c_0^2 + c_1^2\right]}. \tag{1.59}$$

Iar pentru $n \geqslant 2$

$$a_n = \frac{F_0\left[B\beta^{n-1} - A\alpha^{n-1}\right]}{n\left[C\beta^{n-1} + D\alpha^{n-1}\right]} a_{n-1}. \tag{1.60}$$

Pornind de la a_0 și apoi de la a_1, care sînt cunoscuți, se determină toți ceilalți coeficienți. Deci este găsită distribuția de deformații pe unda de descărcare.

Să vedem ce formă va avea capătul barei după o lovitură. Să presupunem că bara este un cilindru circular a cărui rază inițială este r_0, iar după lovire, această rază depinde de secțiune: $r = r(x)$.

Dacă materialul este presupus incompresibil ($\pi r_0^2 \cdot 1 = \pi r^2[1-\tilde{\varepsilon}(x)]$) raza $r(0)$, a secțiunii de la capăt și panta la curba $r = r(x)$ în $x = 0$ după lovire sînt

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{1-\tilde{\varepsilon}(x)}}, \qquad \operatorname{tg}\chi = \left(\frac{dr}{dx}\right)_{x=0} = \frac{r_0 a_1 \left[1 - \frac{c_1^2}{c_0^2}\right]}{2\left[1-\tilde{\varepsilon}(0)\right]^{3/2}} \tag{1.61}$$

unde $\tilde{\varepsilon}(x)$ este dat de (1.52), Înlocuind pe a_1 cu expresia lui din (1.59), rezultă

$$\operatorname{tg}\chi = -\frac{r_0 F_0 p_0 \left[c_0^2 - c_1^2\right]^{3/2}}{2\left[1-\tilde{\varepsilon}(0)\right]^{3/2} c_0^2 c_1^2 m \left[c_0^2 + c_1^2\right]}. \tag{1.62}$$

Din (1.51) rezultă că deformația $\varepsilon_m(0)$ a capătului barei nu depinde de masa corpului care lovește, ci numai de viteza de lovire v_1. Din (1.62) rezultă că tangenta unghiului χ, la capătul barei, se modifică puțin prin modificarea vitezei corpului care lovește, dar depinde în mod esențial de masa sa m.

§ 4. SOLUȚIA APROXIMATIVĂ

a) **Ecuațiile.** În 1946 *G. S. Șapiro* [194] reia problema pusă de *Rahmatulin* și dă o metodă aproximativă de construire a undei de descărcare. Această metodă constituie în fond, o a doua demonstrație a existenței undei de descărcare.

În loc să considere ecuația (1.3) în domeniul încărcării și ecuația (1. 27) în domeniul descărcării, *Șapiro* înlocuiește pe fiecare din ele cu un sistem de două ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi. Pentru domeniul de încărcare ecuațiile vor fi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.63}$$

unde $v = u_t$ este viteza particulelor; iar pentru domeniul descărcării

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \varphi(x), \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.64}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu

$$\varphi(x) = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \sigma_m}{\partial x} - c_0^2 \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial x}. \tag{1.65}$$

Întrucît deformaţia elastică ε^* în domeniul descărcării, este legată de deformaţia totală ε prin relaţia

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \frac{\sigma_m}{E} - \varepsilon_m \tag{1.66}$$

introducînd (1.66) în (1.64), obţinem

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} = c_0 \frac{\partial \sigma^*}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.67}$$

unde numai pentru simetrie s-a pus $v^* = v$.

Deci atît în domeniul încărcării, cît şi în cel al descărcării, trebuie rezolvat un sistem de două ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale, de ordinul întîi şi de tip hiperbolic. Frontiera dintre cele două domenii nu este însă cunoscută apriori. Această problemă matematică a fost considerată de *V. V. Sokolovski* [213]. Ea intervine în probleme de plasticitate plană cu aplicaţii la mecanica pămînturilor. *G. S. Şapiro* [194] reconsideră această problemă. Condiţiile la limită în acest caz, sînt diferite de cele cunoscute pînă acum pentru ecuaţiile de tip hiperbolic. Se obţine o aşa zisă « a patra » problemă pentru condiţiile la limită, în care se dau condiţiile la limită pe două curbe care se întretaie şi care nu sînt caracteristice.

Şapiro ca şi *Rahmatulin*, ataşează planului (x, t), un plan ajutător. El consideră însă planul caracteristicelor (ξ^*, η^*) punînd

$$\xi^* = v^* - c_0\varepsilon^*, \quad \eta^* = v^* + c_0\varepsilon^*. \tag{1.68}$$

b) **Problema inversă.** Caracteristicele şi relaţiile diferenţiale ce au loc pe aceste caracteristice (1.19), le vom scrie sub forma

$$v - \psi(\varepsilon) = \xi, \quad dx = c\, dt \tag{1.69}$$

pentru unda directă şi

$$v + \psi(\varepsilon) = \eta, \quad dx = -c\, dt \tag{1.70}$$

pentru unda inversă; în ambele grupuri

$$\psi(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} c(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\rho c(\sigma)}. \tag{1.71}$$

Pe unda directă, ţinînd seama de (1.19'), din (1.69) rezultă

$$\xi = -2\psi(\varepsilon). \tag{1.72}$$

Deci această undă va fi reprezentată în planul (ξ, η) printr-un segment de pe axa ξ.

Scanned with OKEN Scanner

Se presupune, ca și mai înainte, că trecerea de la încărcare la descărcare este continuă, deci $\varepsilon = \varepsilon_m$, $v = v_m$, $\varepsilon^* = \frac{\sigma(\varepsilon_m)}{E}$. Ținînd seama de aceasta, linia frontieră din planul (ξ^*, η^*), ce corespunde undei de descărcare din planul (x, t), este dată de

$$\xi^*(\varepsilon_m) = -\psi(\varepsilon_m) - c_0 \frac{\sigma(\varepsilon_m)}{E}, \quad \eta^*(\varepsilon_m) = -\psi(\varepsilon_m) + c_0 \frac{\sigma(\varepsilon_m)}{E} \quad (1.73)$$

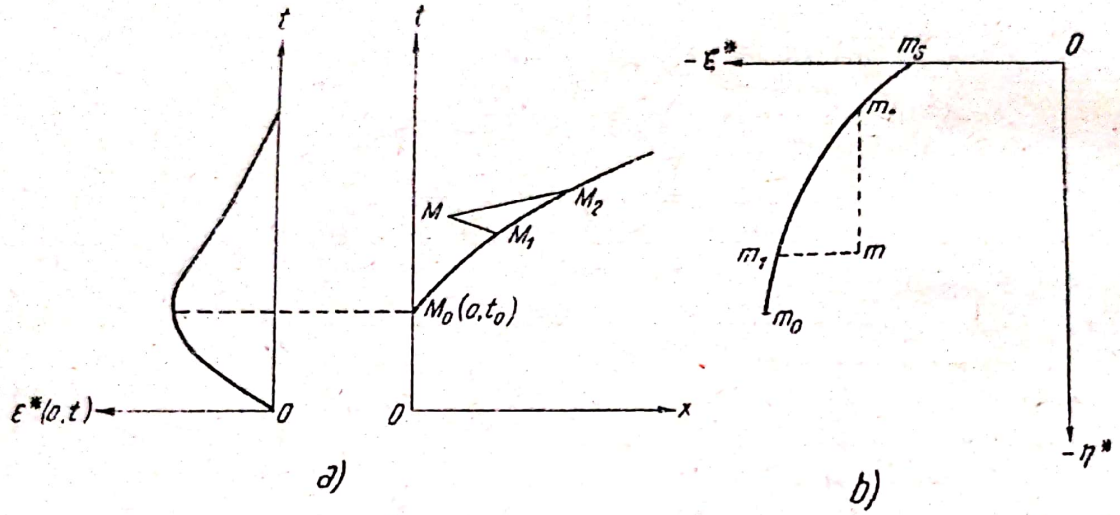

Fig. 11

Dacă în planul (x, t) este dată forma curbei de descărcare, atunci de-a lungul curbei (1.73) sînt cunoscuți x și t, și astfel ajungem la o problemă Cauchy pentru sistemul (1.64). Să presupunem că unda de descărcare are forma din fig. 11, *a*, iar linia frontieră care corespunde acestei unde, are forma din fig. 11, *b*. Pentru determinarea deformației în punctul $M(x, t)$ să ducem prin acest punct caracteristicele de pantă pozitivă și negativă. Ele intersectează unda de descărcare în punctele $M_1(x_1, t_1)$ și $M_2(x_2, t_2)$. În planul (ξ^*, η^*) punctelor M_1 și M_2 le corespund punctele m_1 și m_2. Ducînd prin aceste puncte caracteristicele $\eta^* = \text{const.}$ și $\xi^* = \text{const.}$, obținem punctul $m(\xi_2^*, \eta_2^*)$ corespunzător punctului $M(x, t)$ din planul (x, t).

Pentru punctul m avem din (1.68)

$$\eta^* = v^* + c_0 \varepsilon^* = \eta_1^*(\varepsilon_m) = -\psi(\varepsilon_m(x_1)) + \frac{c_0}{E}\sigma(\varepsilon_m(x_1))$$

$$\xi^* = v^* - c_0 \varepsilon^* = \xi_2^*(\varepsilon_m) = -\psi(\varepsilon_m(x_2)) + \frac{c_0}{E}\sigma(\varepsilon_m(x_2)).$$

De aici deducem

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2c_0}\{\psi(\varepsilon_m(x_2)) - \psi(\varepsilon_m(x_1))\} + \frac{1}{2E}\{\sigma(\varepsilon_m(x_1)) + \sigma(\varepsilon_m(x_2))\} \quad (1.74)$$

Scanned with OKEN Scanner

Deformația totală în punctul M se obține acum din (1.74) și (1.66). Problema inversă este astfel rezolvată, căci ε, σ și v în domeniul descărcării, deci și la capătul barei, sînt cunoscuți.

Pentru exemplificare, să căutăm forma cîtorva curbe frontieră (1.73) pentru cîteva cazuri particulare ale curbei $\sigma \sim \varepsilon$.

1°. În cazul consolidării exponențiale, $\sigma = E\,\varepsilon^{\frac{1}{n}}$ și (1.73) devine

$$\xi^*(\varepsilon_m) = -\frac{2c_0\sqrt{n}}{n+1}\,\varepsilon_m^{\frac{1+n}{2n}} - c_0\,\varepsilon_m^{\frac{1}{n}},$$
$$\eta^*(\varepsilon_m) = -\frac{2c_0\sqrt{n}}{n+1}\,\varepsilon_m^{\frac{1+n}{2n}} + c_0\,\varepsilon_m^{\frac{1}{n}}. \qquad (1.75)$$

Eliminînd din (1.75) pe ε_m, obținem ecuația de legătură între $\xi^*(\varepsilon_m)$ și $\eta^*(\varepsilon_m)$, adică ecuația curbei frontieră:

$$\gamma\,[\eta^* + \xi^*] = -[\eta^* - \xi^*]^{\frac{n+1}{2}}; \quad \text{cu } \frac{1}{\gamma} = \frac{4c_0\sqrt{n}}{[n+1]\,[2c_0]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Punînd de exemplu $n = 3$, obținem

$$[\eta^* - \xi^*]^2 + \gamma\,[\eta^* + \xi^*] = 0, \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{4c_0}{\sqrt{3}}. \qquad (1.76)$$

Făcînd acum transformarea

$$\xi^{*\prime} = -\frac{\xi^* + \eta^*}{2}, \quad \eta^{*\prime} = \pm\frac{\xi^* - \eta^*}{\sqrt{2}}$$

ecuația (1.76) devine

$$\eta^{*\prime 2}(\varepsilon_m) = \gamma\;\xi^{*\prime}(\varepsilon_m).$$

De aici rezultă că ecuația (1.76) reprezintă în planul (ξ^*, η^*) o parabolă cu axa de simetrie $\xi^* = \eta^*$. Din (1.75) rezultă că trebuie să considerăm acele parabole, care sînt cuprinse în domeniul valorilor negative ale lui ξ^*. Dacă din a doua formulă (1.75) căutăm maximul lui η^* cînd ε_m variază, găsim că maximul lui η^* are loc pentru $\varepsilon_m = \frac{1}{\sqrt{27}}$.

2°. Pentru cazul materialelor elasto-plastice cu consolidare liniară, pentru $\varepsilon_m > \varepsilon_s$ obținem

$$\xi^*(\varepsilon_m) = -\frac{c_0}{\lambda^2}\left\{[\lambda+1]\,\varepsilon_m + [2\lambda^2 - \lambda - 1]\,\varepsilon_s\right\},$$
$$\eta^*(\varepsilon_m) = -\frac{c_0\,[1-\lambda]}{\lambda^2}\,[\varepsilon_s - \varepsilon_m] \qquad (1.77)$$

Scanned with OKEN Scanner

cu $\lambda = \sqrt{\frac{E}{E_1}}$. Pentru $\varepsilon_m < \varepsilon_s$

$$\xi^*(\varepsilon_m) = \xi, \quad \eta^*(\varepsilon_m) = 0. \tag{1.78}$$

Eliminînd din (1.77) pe ε_m, obţinem în planul (ξ^*, η^*) ecuaţia liniei frontieră, care corespunde undei de descărcare, sub forma a două segmente de dreaptă $m_0 m_s$ şi $m_s m_p$ (fig. 12)

$$\eta^*(\varepsilon_m) = \frac{-1+\lambda}{1+\lambda}[\xi^*(\varepsilon_m) + 2c_0\varepsilon_s] \quad \text{pentru } \varepsilon_m > \varepsilon_s \tag{1.79}$$

$$\eta^*(\varepsilon_m) = 0 \quad \text{pentru } \varepsilon_m < \varepsilon_s \tag{1.80}$$

c) **Problema directă.** Pentru rezolvarea problemei directe, *Şapiro* consideră numai cazul consolidării liniare, dar observă că metoda se poate extinde şi la alte tipuri de consolidare. În acest caz, imaginea undei de descărcare în planul (ξ^*, η^*), este dreapta (1.79). În ceea ce priveşte legea de variaţie a presiunii la capătul barei, ea va fi deocamdată presupusă oarecare. Pentru că unda de descărcare intersectează undele lui Riemann, atunci în fiecare punct de pe dreapta (1.79) este dată relaţia dintre x şi t, de forma

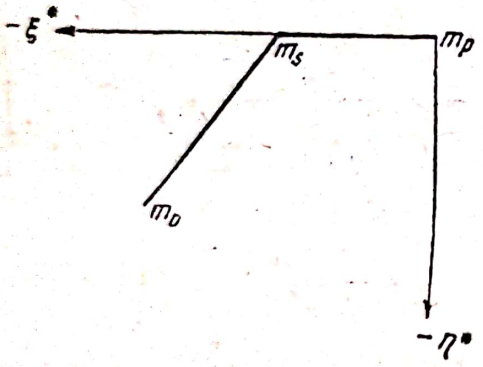

Fig. 12

$$x = c_1[t - \tau(\varepsilon)] \tag{1.81}$$

unde $\tau(\varepsilon)$ este coordonata unui punct oarecare de pe axa Ot. Pe axa Ot, deci la capătul barei, este dată legea de variaţie a lui $\varepsilon^*(0, t)$, este cunoscută deci valoarea lui $\tau(\varepsilon)$, dar este necunoscută viteza v^*, şi deci în planul (ξ^*, η^*), nu putem găsi curba ce corespunde acestei axe. Punctului M_0 $(0, t_0)$ care corespunde începutului micşorării deformaţiei la capătul barei (fig. 13, *a*), îi corespunde punctul m_0 din planul (ξ^*, η^*) (fig. 12). Pentru găsirea soluţiei, adică a distribuţiei deformaţiilor pe unda de descărcare, să determinăm variaţia $d\varepsilon^*$ a deformaţiei elastice de-a lungul undei de descărcare, pornind de la valoarea lui ε^* în punctul M_0 $(0, t_0)$. Deformaţia ε^* în acest punct este

$$\varepsilon^*(0, t_0) = \frac{\sigma(0, t_0)}{E}. \tag{1.82}$$

Vom presupune deocamdată că derivata în raport cu timpul a lui $\varepsilon^*(0, t)$ nu este identic nulă în vecinătatea punctului M_0, şi există pentru $t > t_0$.

Scanned with OKEN Scanner

Să mai presupunem că în planul (x, t), în vecinătatea punctului $M_0\ (0, t_0)$ putem să dezvoltăm pe $\varepsilon^*\ (x, t)$ în serie de puteri. În punctul $M_\alpha\ (0, t)$ de pe axa Ot și respectiv în punctul $M_1\ (x, t)$ de pe unda de descărcare, obținem

$$\varepsilon^*(0, t) = \varepsilon^*(0, t_0) + [t - t_0]\ \varepsilon_1 + [t - t_0]^2\ \varepsilon_2 + \ldots \tag{1.83}$$

$$\varepsilon^*(x, t) = \varepsilon^*(0, t_0) + b_1 x + b_3 x^3 + \ldots \tag{1.84}$$

Să mai presupunem că unda de descărcare se poate pune sub forma

$$x = [t - t_0]\ \alpha_1 + [t - t_0]^2\ \alpha_2 + \ldots \tag{1.85}$$

Coeficienții din (1.83) sînt cunoscuți, căci variația deformației elastice la capătul barei este dată, dar coeficienții din (1.84) și (1.85) sînt necunoscuți, căci forma undei de descărcare nu este dată.

Să păstrăm din dezvoltările de mai sus, doar termenii liniari. Deci

$$\varepsilon^*(0, t) = \varepsilon^*(0, t_0) + [t - t_0]\ \varepsilon_1 \tag{1.86}$$

$$\varepsilon^*(x, t) = \varepsilon^*(0, t_0) + b_1 x \tag{1.87}$$

$$x = [t - t_0]\ \alpha_1. \tag{1.88}$$

Relația (1.74) pentru capătul barei, ținînd seama că materialul este consolidabil liniar (adică $\psi(\varepsilon) = c_1\varepsilon + [c_0 - c_1]\ \varepsilon_s$, și neglijînd [1]) variația deformației remanente în vecinătatea considerată a punctului $M_0\ (0, t_0)$, se scrie

$$\varepsilon^*(0,t) = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_m^*(x_1) + \varepsilon_m^*(x_2) + \frac{1}{\lambda}[\varepsilon_m^*(x_2) - \varepsilon_m^*(x_1)]\right\}.$$

Făcînd considerații similare cu cele de la paragraful precedent, în această relație vom pune $x_1 = \dfrac{\alpha_1}{1 + \lambda_1}[t - t_0]$ și $x_2 = \dfrac{\alpha_2}{1 - \lambda_1}[t - t_0]$. Ținînd seama și de (1.86) — (1.88), obținem

$$\varepsilon_m^*(0, t_0) + [t - t_0]\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left\{2\,\varepsilon_m^*(0, t_0) + \frac{b_1\alpha_1}{1 + \lambda_1}[t - t_0] + \frac{b_1\alpha_1}{1 - \lambda_1}[t - t_0] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{b_1\alpha_1}{1 - \lambda_1}[t - t_0] - \frac{b_1\alpha_1}{1 + \lambda_1}[t - t_0]\right]\right\}$$

sau

$$\varepsilon_m^*(0, t_0) + [t - t_0]\ \varepsilon_1 = \varepsilon_m^*(0, t_0) + \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda\,[1 - \lambda_1^2]}\, b_1\, \alpha_1\, [t - t_0].$$

---

[1]) Această neglijare nu se poate face totdeauna.

Scanned with OKEN Scanner

Din această relație îl putem determina pe b_1

$$b_1 = \frac{\lambda[1-\lambda_1^2]}{\lambda+\lambda_1}\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} \quad \text{cu} \quad \lambda_1 = \frac{\alpha_1}{c_1}$$

care introdus în (1.87) dă

$$\varepsilon_m^*(x, t) = \varepsilon_m^*(0, t_0) + \frac{\lambda[1-\lambda_1^2]}{\lambda+\lambda_1}\varepsilon_1[t-t_0]. \tag{1.89}$$

Din această formulă deducem prin diferențiere:

$$d\varepsilon_m^*(x, t) = \frac{\lambda[1-\lambda_1^2]}{\lambda+\lambda_1}\varepsilon_1\, dt = \frac{d\varepsilon^*(0,t)}{dt}\, dt. \tag{1.90}$$

Întrucît pentru materialele consolidabile neliniar și încărcări oarecari, valoarea lui λ_1 este necunoscută, mărimea $d\varepsilon_m^*$ din (1.90) se poate obține numai în condiția ca în punctul $M_0(0, t_0)$, $\frac{d\varepsilon^*}{dt} = 0$. Dacă însă încărcarea este instantanee și materialul consolidabil liniar, (1.85) devine $x = c_1 t$ și $\lambda_1 = \lambda = \sqrt{\frac{E_1}{E}}$, $c_1 = \alpha_1$ și $t_0 = 0$. În acest caz nu mai trebuie să punem condiția ca derivata să fie nulă în $M_0(0, t_0)$, și putem să utilizăm formula (1.90) pentru determinarea deformației pe unda de descărcare.

Pentru cazul $\frac{d\varepsilon^*}{dt} = 0$, trebuie să utilizăm în dezvoltările (1.83) — — (1.85) mai mulți termeni. Vom da mai jos cîteva exemple, pentru o mai bună înțelegere a metodei lui *Șapiro*, aplicată la materiale consolidabile liniar.

d) **Exemple.** 1°. Să considerăm ca un prim exemplu, cazul în care deformația la capătul barei crește monoton și apoi scade monoton (*G. S. Șapiro* [194]). Să presupunem că la timpul $t = t_0$, derivata $\frac{d\varepsilon^*(0,t)}{dt} = 0$, deci că $\varepsilon^*(0, t)$ are un maxim în $t = t_0$. Pentru a obține soluția, adică pentru a construi unda de descărcare în planul (x, t), vom lua în acest plan, pe axa $x = 0$, punctul $M_\alpha(0, t_\alpha)$, astfel încît cu gradul de aproximație cerut, să putem considera $\varepsilon^*(0, t_0) = \varepsilon^*(0, t_\alpha)$, iar $t_\alpha > t_0$ (vezi fig. 13*a*). Din punctul M_α să ducem o paralelă la axa Ox pînă cînd intersectează dreapta $x = c_1[t-t_0]$ în punctul M_1. Începutul undei de descărcare coincide aproape cu această dreaptă. (Această coincidență nu are loc însă totdeauna. Pentru găsirea riguroasă a direcției inițiale a undei de descărcare,

a se vedea mai departe metoda lui Biderman). Putem deci să considerăm că punctul M_1 aparţine undei de descărcare. Punctul corespunzător m_1 din planul (ξ^*, η^*) coincide cu punctul m_0. Se construieşte deci triunghiul $M_0 M_\alpha M_1$ în care deformaţia este practic constantă.

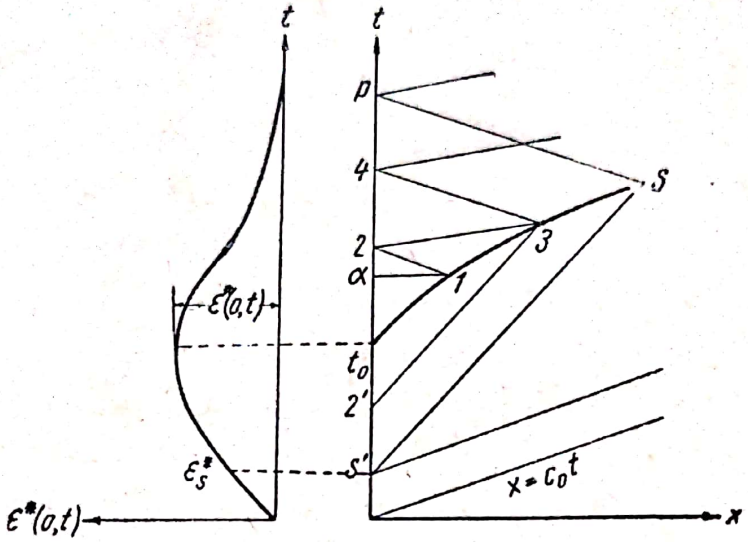

Fig. 13 *a*

Mai departe, din punctul M_1, ducem caracteristica de înclinare negativă pînă la intersecţia cu axa $0t$ în punctul M_2. În acest punct este cunoscut $\varepsilon^*(0, t_2)$ şi deci este determinată dreapta din planul (ξ^*, η^*)

$$\varepsilon^*(0, t_2) = \frac{1}{2c_0}[\eta^* - \xi^*]. \quad (1.91)$$

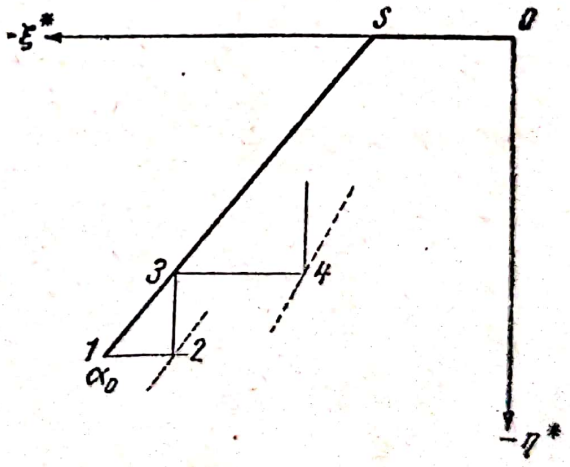

Fig. 13 *b*

Această dreaptă a fost figurată punctat în fig. 13*b*.

Punctul m_2 care corespunde lui M_2 se găseşte la intersecţia dreptei (1.91) cu caracteristica $\eta^* = \text{const.}$, dusă prin punctul M_1. Ducînd prin punctul m_2 caracteristica $\xi^* = \text{const.}$, găsim intersecţia ei cu dreapta (1.79) în punctul m_3, deci găsim intersecţia ei cu dreapta care este imaginea undei de descărcare. Folosindu-ne de (1.68), determinăm deformaţia corespunzătoare punctului m_3. Înversa funcţiei $\varepsilon^*(0, t)$ ne furnizează atunci timpul t_2'. Pentru aceasta, ducem prin M_2 caracteristica de pantă pozitivă. Ştim că pe unda de descărcare, această caracteristică va intersecta caracteristica

de pantă pozitivă din domeniul încărcării şi pe care deformaţia elastică are aceeaşi mărime ca şi pe prima caracteristică. Avem deci de rezolvat ecuaţia $\varepsilon^*(0, t) = \varepsilon_2^*(0, t_2)$, din care deducem pe t_2. Este deci determinată caracteristica de pantă pozitivă $x = c_1[t - t_2]$ ce trece prin M_3. Astfel se găseşte punctul M_3 de pe unde de descărcare.

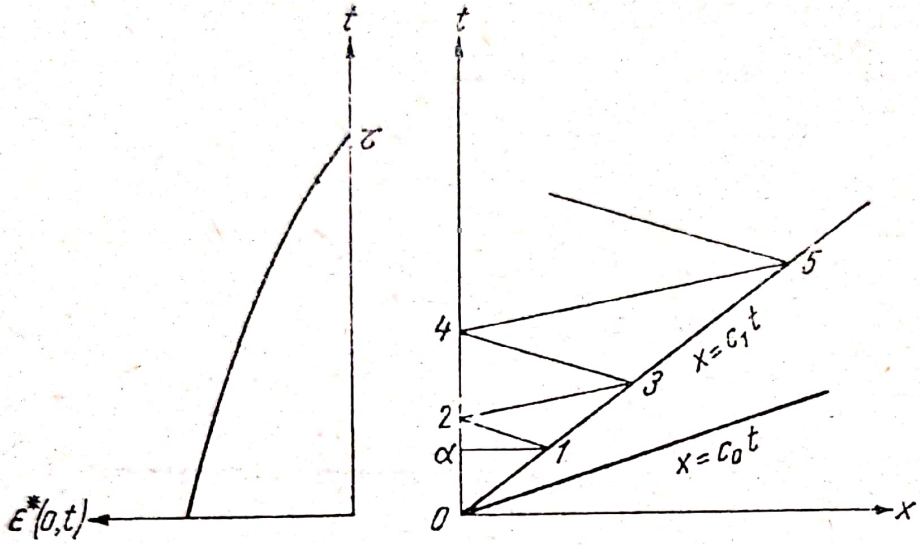

Fig. 14

Similar se face şi construcţia ulterioară. Ea poate fi făcută, prin interpolare, pentru toate punctele de pe unda de descărcare, pînă la punctul S, unde unda de descărcare întîlneşte frontul undelor plastice. În restul barei continuă să se propage numai unde elastice.

G. S. Şapiro a făcut şi o exemplificare numerică a consideraţiilor de mai sus, luînd ca lege de variaţie a deformaţiei elastice la capătul barei, legea

$$\varepsilon^*(0, t) = 8\varepsilon_s\left[1 - \frac{t}{\tau}\right]\frac{t}{\tau}$$

unde τ este timpul de acţionare a presiunii. El compară rezultatele obţinute, care sînt aproximative, cu cele exacte, obţinute de *Rahmatulin* în altă lucrare. Coincidenţa celor două metode este satisfăcătoare.

2°. Într-un al doilea exemplu, *Şapiro* a considerat cazul în care deformaţia la capătul barei creşte instantaneu şi apoi scade monoton.

Pentru aceasta, din punctul $M_\alpha(0, t_\alpha)$, apropiat de punctul M_0 (0 0) ducem o dreaptă paralelă cu axa x pînă la intersecţia, în punctul M_1, cu unda de descărcare $x = c_1 t$. În acest caz $\frac{d\varepsilon^*(0,t)}{dt}$ poate fi diferit de zero, pentrucă $\lambda = \lambda_1 = \sqrt{\frac{E_1}{E}}$ şi deci

putem să ne folosim de (1.90). Deformaţia în punctul M_1 se poate găsi folosindu-ne de (1.90) şi de legea de variaţie a lui ε^* la capătul barei.

În acest fel se găseşte punctul m_1 corespunzător lui M_1. Construcţia ulterioară este aceeaşi ca şi cea din cazul precedent (fig. 14).

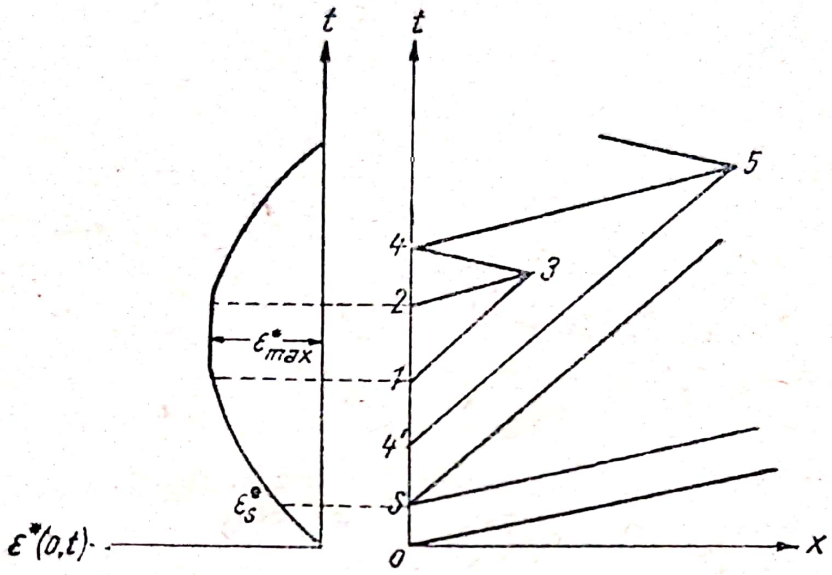

Fig. 15

Ca şi în cazul precedent, *G. S. Şapiro* a făcut o exemplificare numerică, luînd ca lege de variaţie a deformaţiei la capătul barei relaţia

$$\varepsilon^*(0, t) = \varepsilon_m(0, 0)\left[1 - \left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right]$$

unde τ este timpul de acţionare a presiunii.

3°. În 1948 *H. A. Rahmatulin* şi *G. S. Şapiro* [179] au considerat cazul în care presiunea la capătul barei creşte monoton, rămîne constantă într-un interval de timp şi apoi scade monoton. Materialul este de asemenea considerat cu consolidare liniară.

Deformaţia elastică de la capătul barei $\varepsilon^*(0, t) = \frac{\sigma(0, t)}{E}$, variază conform diagramei din fig. 15. În punctul S, $\varepsilon^*(0, t_s) = \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}$; iar în intervalul $t_0 \leqslant t \leqslant t_\alpha$, $\varepsilon^*(0, t) = \varepsilon^*_{max} = \text{const}$.

Să căutăm în planul (x,t) punctul de intersecţie al caracteristicelor de pantă pozitivă

$$t - t_1 = \frac{x}{c_1}, \qquad t - t_2 = \frac{x}{c_0}. \tag{1.92}$$

Punctul M_1 corespunde începutului menținerii presiunii constante, iar M_2 corespunde începutului descărcării. Punctul de intersecție M_3 are coordonatele

$$x_3 = \frac{c_0 c_1}{c_0 - c_1}[t_2 - t_1], \qquad t_3 = \frac{c_0 t_2 - c_1 t_1}{c_0 - c_1} \tag{1.93}$$

În triunghiul $M_1M_2M_3$ viteza particulelor este constantă. De aceea în planul (ξ^*, η^*) acestui triunghiu îi corespunde punctul m_{123}. Figura este similară cu fig. 13*b* (diferă numai notațiile). Să determinăm în planul (x, t), punctul M_4 de intersecție al caracteristicei de pantă negativă ce trece prin punctul M_3 cu axa $x = 0$. Obținem din $t - t_3 = -\frac{1}{c_0}[x - x_3]$ și $x = 0$:

$$t_4 = t_3 + \frac{x_3}{c_0}. \tag{1.94}$$

În triunghiul $M_2M_3M_4$ se propagă unde directe, deci în planul (ξ^*, η^*) acestui triunghiu îi va corespunde un segment de caracteristică $\eta^* = \text{const}$. Ducînd deci o caracteristică $\eta^* = \text{const}$ prin punctul m_{123} și intersectînd-o cu dreapta

$$\varepsilon^*(0, t_4) = \frac{\eta^* - \xi^*}{2 c_0} \tag{1.95}$$

unde $\varepsilon^*(0, t_4)$ este cunoscut, obținem punctul m_4. Din punctul m_4 vom duce caracteristica $\xi^* = \text{const}$. pînă ce ea intersectează în punctul m_5 dreapta care este imaginea undei de descărcare. În punctul m_5 sînt cunoscute ξ^* și η^* și, prin urmare, pe unda de descărcare se determină $\varepsilon^*_m(x) = \frac{\xi^* - \eta^*}{2 c_0}$. Întrucît unda de descărcare intersectează undele lui Riemann, inversînd funcția $\varepsilon^*_m(x, t)$ se poate determina $t_{4'}$ și deci punctul $M_{4'}$ din fig. 15. Punctul M_5 aparținînd undei de descărcare se obține deci prin intersecția caracteristicelor de pantă pozitivă ce trec prin $M_{4'}$ și M_4. Pe aceste caracteristice deformația elastică este aceeași. Construcția ulterioară este evidentă.

Dacă continuăm să adoptăm aceeași definiție a undei de descărcare, adică, «locul punctelor din planul (x, t) pe care deformația în fiecare secțiune a barei este maximă», în exemplul de mai sus, triunghiul $M_1M_2M_3$ face parte de asemenea din unda de descărcare.

Problema din acest exemplu se reduce la problema mixtă a ecuațiilor hiperbolice. Într-adevăr, în planul (ξ^*, η^*) de-a lungul

Scanned with OKEN Scanner

caracteristicei $m_{123}m_4$ sînt date x şi t, iar de-a lungul dreptei $m_{123}m_5$, între x şi t sînt date relaţiile (1.81). Evident că deformaţia şi viteza, pentru x şi t oarecari, se pot găsi sub formă întreagă.

Dacă segmentul M_1M_2 pe care deformaţia este constantă, lipseşte, atunci triunghiurile $M_1M_2M_3$ şi $M_2M_3M_4$ (fig. 15) degenerează într-un punct. Acelaşi lucru se întîmplă şi cu triunghiul $m_{123}m_4m_5$. În acest caz problema se reduce la cea tratată în exemplul 1°.

Soluţia este deosebit de simplă în cazul în care caracteristica m_4m_5 intersectează nu dreapta înclinată, imagine a undei de descărcare, ci segmentul de caracteristică $\eta^* = 0$. Să presupunem pentru început că caracteristica m_4m_5 intersectează axa $\eta^* = 0$ în punctul $\xi^* = -2c_0\,\varepsilon_s$ (v. (1,79)). Atunci coordonatele punctului m_4, conform formulei (1.77) sînt

$$\xi^* = -2\,c_0\,\varepsilon_s\,, \quad \eta^* = -\frac{c_0[1-\lambda]}{\lambda^2}\,[\varepsilon_s - \varepsilon_{max}]$$

căci în ξ^* punem $\varepsilon_m = \varepsilon_s$. Deformaţia în punctul $M\ (0, t_4)$ este dată de (1.95):

$$\varepsilon^*\,(0, t_4) = \frac{\eta^* - \xi^*}{2c_0} = -\frac{1}{2\lambda^2}\left\{[1-\lambda]\,\varepsilon_{max} + [1-\lambda+2\,\lambda^2]\,\varepsilon_s\right\} \quad (1.96)$$

iar porţiunea de bară, deformată plastic, va avea lungimea

$$l_1 = \frac{c_0\,c_1}{c_0 - c_1}\,[t_4 - t_5]. \quad (1.97)$$

Dacă însă pe caracteristica m_4m_5 avem condiţia $\xi^* > -2c_0\,\varepsilon_s$ atunci pentru deformaţie avem

$$\varepsilon^*\,(0, t_4) > -\frac{1}{2\,\lambda^2}\left\{[1-\lambda]\,\varepsilon_{max} + [1-\lambda+2\,\lambda^2]\,\varepsilon_s\right\} \quad (1.98)$$

iar pentru determinarea lungimii porţiunii de bară deformată plastic, în loc de (1.97) ne vom folosi de formula

$$l_1 = \frac{c_0c_1}{c_0 - c_1}\,[t^* - t_s] \quad (1.99)$$

unde t^* se găseşte prin inversarea funcţiunii (1.96).

Lungimea porţiunii de bară în care deformaţia remanentă este constantă, în toate cazurile va fi abscisa punctului M_s:

$$l = [t_2 - t_1]\,\frac{c_0c_1}{c_0 - c_1}. \quad (1.100)$$

Această relaţie este datorită lui *M. P. White* şi *Le van Griffis* [239].

Rahmatulin şi *Şapiro* atrag atenţia că metoda de mai sus este aplicabilă şi în cazul în care presiunea la capătul barei creşte instan-

Scanned with OKEN Scanner

taneu. În acest caz, după cum am văzut, unda de descărcare este dreapta $x = c_1 t$. În cazul consolidării neliniare, metoda rămîne aplicabilă, dar soluţia nu se mai poate pune sub formă întreagă.

§ 5. UNELE DEZVOLTĂRI ALE METODEI APROXIMATIVE

În metoda aproximativă a lui *Şapiro* expusă mai sus, dificultatea era în a găsi direcţia iniţială a undei de descărcare. Odată un prim punct găsit pe această undă, metoda aproximativă se aplică

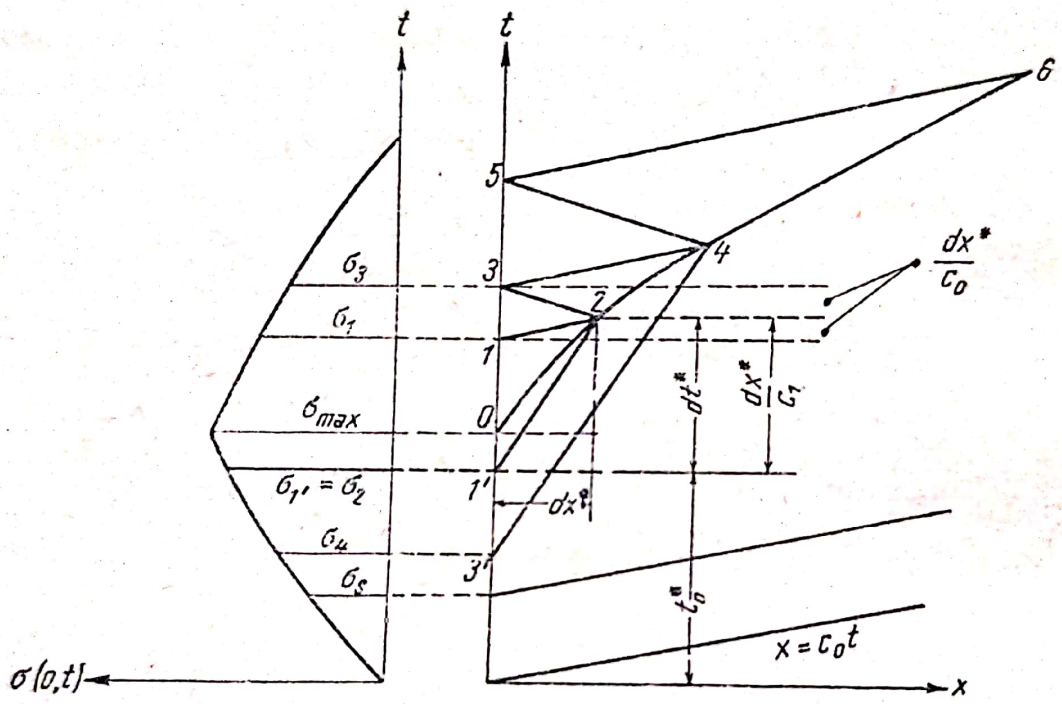

Fig. 16 a

foarte uşor. Pe de altă parte această metodă se aplică propriu-zis numai materialelor consolidabile liniar, iar presiunea la capătul barei trebuie să satisfacă anumite condiţii în vecinătatea maximului ei. *V. L. Biderman* [162] a reluat tocmai problema găsirii direcţiei iniţiale a undei de descărcare. Consideraţiile lui sînt făcute pentru materiale consolidabile oarecari, iar legea de variaţie a tensiunii la capătul barei poate fi oarecare, dar se presupune că tangenta la curba $\sigma\ (0,t)$, care dă variaţia tensiunii la capătul barei, are o discontinuitate în punctul $\sigma\ (0,t) = \sigma_{max}$. Spre deosebire de *G. S. Şapiro*, care foloseşte drept plan auxiliar planul caracteristicelor (ξ^*, η^*) *V. L. Biderman* ataşează planului (x,t) planul (σ, v), unde interpretările fizice sînt mai uşor de făcut.

a) **Viteza iniţială a undei de descărcare.** Să examinăm comportarea undei de descărcare în apropierea capătului barei. După cum

se știe, unda de descărcare apare la capătul barei în momentul în care tensiunea a atins valoarea ei maximă. Să considerăm pe această undă un punct M_2 (notat cu 2 în fig. 16 a) apropiat de capătul ei și care are coordonatele $x_2^* = dx^*$ și $t_2^* = t_0^* + dt$. (Vom nota cu «asteric» coordonatele ce se referă la un punct de pe unda de descărcare).

Din punctul M_2 vom duce caracteristicele de pantă pozitivă și negativă din domeniul de descărcare, și caracteristica de pantă pozitivă din domeniul de încărcare, ce trece prin acest punct. Avem

$$t_{1'} = t_0^* - \left(\frac{dx^*}{c_1} - dt^*\right),$$

$$t_1 = t_0 + \left(dt^* - \frac{dx^*}{c_0}\right),$$

$t_3 = t_0 + \left(dt^* + \frac{dx^*}{c_0}\right)$. În aceste formule t_0 este ordonata punctului O, iar $c_1 = c_1(\sigma_{max})$ este viteza de propagare a undei plastice ce corespunde tensiunii maxime.

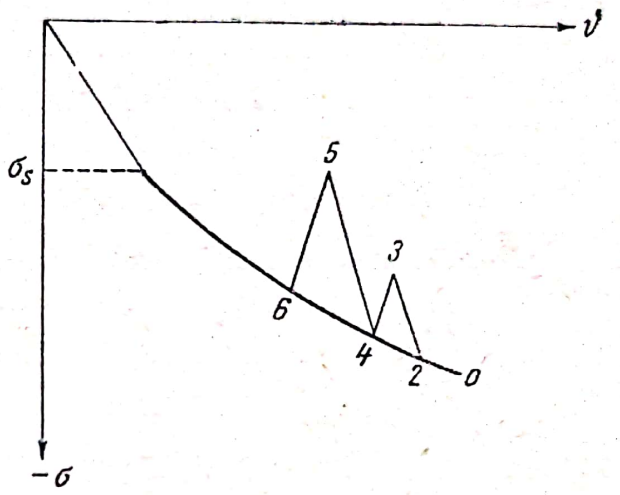

Fig. 16 b

Dacă curba de variație a tensiunii la capătul barei are o discontinuitate a tangentei pentru $\sigma(0,t) = \sigma_{max}$, atunci cele două valori ale tensiunii dintr-o parte și din alta a acestui punct, sînt date de

$$\sigma(0, t) = \sigma_{max} + k_1 (t - t_0) \quad \text{pentru } t < t_0$$
$$\sigma(0, t) = \sigma_{max} + k_2 (t - t_0) \quad \text{pentru } t > t_0$$

unde k_1 și k_2 sînt cele două valori ale lui $\frac{d\sigma(0,t)}{dt}$.

Să exprimăm acum vitezele și tensiunile din punctele $M_{1'}$, M_1, M_2 și M_3 prin valorile lor din punctul O. Pentru punctul $M_{1'}$ avem

$$\sigma_{1'} = \sigma_{max} - k_1 (t_0 - t_{1'}) = \sigma_{max} - k_1 \left(\frac{dx^*}{c_1} - dt^*\right) \quad (1.101)$$

iar viteza particulelor este dată de (1.71)

$$v_{1'} = -\int_0^{\sigma_{1'}} \frac{d\sigma}{\rho c(\sigma)} = -\left[\int_0^{\sigma_{max}} \frac{d\sigma}{\rho c(\sigma)} - \frac{\sigma_{max} - \sigma_{1'}}{\rho c_1}\right] =$$

$$= v_{max} + \frac{1}{\rho c_1} k_1 \left(\frac{dx^*}{c_1} - dt^*\right)$$

unde v_{max} este viteza corespunzătoare punctului O. În afară de aceasta avem evident $\sigma_2 = \sigma_{1'}$ și $v_2 = v_{1'}$.

Pentru punctele M_1 și M_3, obținem

$$\sigma_1 = \sigma_{max} + k_2\ (t_1 - t_0) = \sigma_{max} + k_2\left(dt^* - \frac{dx^*}{c_0}\right)$$

$$\sigma_3 = \sigma_{max} + k_2\ (t_3 - t_0) = \sigma_{max} + k_2\left(dt^* + \frac{dx^*}{c_0}\right)$$

$$v_1 = v_{max} + j\ (t_1 - t_0) = v_{max} + j\left(dt^* - \frac{dx^*}{c_0}\right)$$

$$v_3 = v_{max} + j\ (t_3 - t_0) = v_{max} + j\left(dt^* + \frac{dx^*}{c_0}\right)$$

unde $j = \frac{dv}{dt}$ este acceleraţia capătului barei pentru $t \geqslant t_0$.

De-a lungul caracteristicelor M_1M_2 și M_2M_3 sînt satisfăcute relaţiile

$$v_1 - \frac{1}{\rho c_0}\sigma_1 = v_2 - \frac{1}{\rho c_0}\sigma_2$$

$$v_3 + \frac{1}{\rho c_0}\sigma_3 = v_2 + \frac{1}{\rho c_0}\sigma_2.$$

Introducînd în aceste relaţii valorile tensiunilor şi vitezelor obţinute mai sus, rezultă

$$j\left(\frac{1}{b^*} - \frac{1}{c_0}\right) - \frac{k_1}{\rho c_1}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{b^*}\right) = \frac{1}{\rho c_0}\left[k_1\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{b^*}\right) + k_2\left(\frac{1}{b^*} - \frac{1}{c_0}\right)\right]$$

$$j\left(\frac{1}{b^*} + \frac{1}{c_0}\right) - \frac{k_1}{\rho c_1}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{b^*}\right) = -\frac{1}{\rho c_0}\left[k_1\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{b^*}\right) + k_2\left(\frac{1}{b^*} + \frac{1}{c_0}\right)\right]$$

unde $b^* = \frac{dx^*}{dt^*}$ este viteza iniţială de propagare a undei de descărcare. Eliminînd din aceste formule pe j, obţinem următoarea formulă pentru determinarea vitezei iniţiale (în O) a undei de descărcare

$$b^* = \sqrt{\frac{c_1^2 c_0^2 (k_1 - k_2)}{c_0^2 k_1 - c_1^2 k_2}}. \qquad (1.102)$$

De remarcat că viteza este dată sub formă întreagă. Această formulă importantă este datorită lui *Biderman*.

Să considerăm cîteva cazuri particulare. Dacă $k_1 = 0$, iar $k_2 \neq 0$ sau dacă k_1 fiind oarecare, $k_2 = \infty$, atunci $b^* = c_0$ şi pe porţiunea ei iniţială unda de descărcare are aceeaşi viteză ca şi undele

Scanned with OKEN Scanner

elastice. Dacă însă $k_1 \neq 0$ dar $k_2 = 0$ sau dacă $k_1 = \infty$, k_2 fiind oarecare, atunci inițial unda de descărcare are viteza undelor plastice pe care tensiunea este maximă.

Dacă în punctul $\sigma(0, t) = \sigma_{max}$ curba imagine a variației lui $\sigma(0, t)$ nu are un punct de discontinuitate a tangentei ($k_1 = k_2 = 0$) atunci formula (1.102) nu mai este aplicabilă. În acest caz, după cum am mai amintit mai sus, trebuie să considerăm în calcule și termeni de ordin superior. Dacă derivata secundă $\frac{d^2\sigma(0,t)}{dt^2}$ este continuă în punctul $\sigma(0,t) = \sigma_{max}$ *Biderman* dă pentru viteza b^*, formula

$$b^* = c_0 \left[\sqrt{\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 + 3} - \frac{c_0}{c_1} \right]. \qquad (1.103)$$

Deci în toate cazurile, direcția inițială a undei de descărcare în planul (x, t) se poate găsi. Mai departe construcția undei de descărcare se face cu totul similar ca și în metoda lui *Șapiro*.

După ce se dă legea de variație a tensiunii la capătul barei, găsim direcția inițială a undei de descărcare. Pe această direcție luăm un punct M_2 suficient de apropiat de O. Tensiunea în punctul M_2 se poate determina cu ajutorul formulei (1.101). Se construiește apoi în planul (σ, v) curba $v = -\psi(\sigma) = -\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\rho c(\sigma)}$ (fig. 16b). În acest plan deci se găsește imaginea undei de descărcare (porțiunea de curbă îngroșată în figură). Însemnăm pe această curbă punctele o și m_2, imaginele punctelor O și M_2. Ducem segmentul m_2m_3 corespunzător caracteristicei M_2M_3. Poziția punctului m_3 este determinată prin cunoașterea tensiunii σ_3 (fig. 16a). Ducem apoi caracteristica M_3M_4 și imaginea ei m_3m_4. Tensiunea σ_4 se află din diagrama $\sigma \sim v$ ca intersecție a caracteristicei m_3m_4 cu imaginea undei de descărcare. Odată găsită această tensiune, este găsită și poziția punctului $M_{1'}$ în care $\sigma_{1'} = \sigma_4$. Ducem acum caracteristica $x - c(\sigma_4)$. $t = \text{const.}$ în domeniul de încărcare. Intersecția acestei caracteristice cu caracteristica M_3M_4 fixează poziția punctului M_4 de pe unda de descărcare. În mod similar construcția poate fi dusă mai departe.

b) **Exemplu.** Pentru ilustrarea celor de mai sus *Biderman* consideră și unele exemple. Reproducem mai jos unul dintre ele (vezi și exemplul 1° de la § 4, considerat de *Șapiro*).

O bară semi-infinită este încărcată la capătul liber conform legii

$$-\sigma(0,t) = 8\sigma_s \frac{t}{\tau}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

unde τ este timpul de acționare al încărcării. Reprezentarea grafică a acestei funcțiuni este dată în fig. 17, *a*. Tensiunea este maximă la $t = \frac{\tau}{2}$, cînd ea depășește de două ori limita de elasticitate. Materialul este presupus consolidabil liniar iar modulul de consolidare $E_1 = 16\ E$. Raportul dintre viteza constantă c_1 de propagare a undelor plastice și c_0 este $\frac{c_1}{c_0} = \frac{1}{4}$.

În diagrama 17, *b* s-au luat variabilele adimensionale $\frac{t}{\tau}$ și $\frac{x}{c_1\tau}$.

În planul (σ, v) se construiește imaginea undei de încărcare. În porțiunea $\sigma < \sigma_s$ ea este dată de $v = -\frac{\sigma}{c_0\rho}$, iar în porțiunea $\sigma > \sigma_s$ de $v = -\frac{\sigma_s}{c_0\rho} - \frac{\sigma - \sigma_s}{c_1\rho}$. În graficul 17, *c* s-a luat variabila adimensională $\frac{v}{v_s}$ în care $v_s = \frac{\sigma_s}{c_0\rho}$, iar tensiunea este negativă (compresiune).

Panta inițială a undei de descărcare în planul (x, t) este dată de formula (1.103).

$$b^* = c_0\left[\sqrt{\frac{c_0^2}{c_1^2} + 3} - \frac{c_0}{c_1}\right] = 1{,}44\ c_1 .$$

Să ducem din punctul O un segment de dreaptă OM, ținînd seama de panta găsită. Tensiunea în punctul M se află ducînd caracteristica M_1M din domeniul de încărcare. După cum s-a văzut și mai sus, tensiunea în acest punct diferă puțin de σ_{max} și deci de cele mai multe ori în calcule putem să considerăm $\sigma_M = \sigma_{max}$. Deci punctul m în planul (σ, v) coincide cu punctul o care este capătul imaginii undei de descărcare. Din punctul M ducem caracteristica MM_1 și aflăm tensiunea din punctul M_1. Construim apoi imaginea acestei caracteristice în planul (v, σ). În acest plan ducem apoi caracteristica m_1m_2 și determinăm tensiunea în punctul m_2 ($\sigma_2 = 1{,}96\ \sigma_s$). Cu valoarea acestei tensiuni și graficul $\sigma(0, t)$ putem construi în planul (x, t) caracteristica M_3M_2 din domeniul de încărcare. Punctul M_2 în acest plan este intersecția caracteristicelor M_3M_2 și M_1M_2.

Cu totul similar se pot găsi în continuare punctele M_4, M_6, etc., de pe unda de descărcare. Capătul S al acestei unde se află cu ajutorul caracteristicelor M_8M_9 și M_9S care se construiesc în prealabil în planul (v, σ). Deformațiile plastice au loc în bară pînă la punctul S; în dreapta lui deformațiile sînt doar elastice.

Scanned with OKEN Scanner

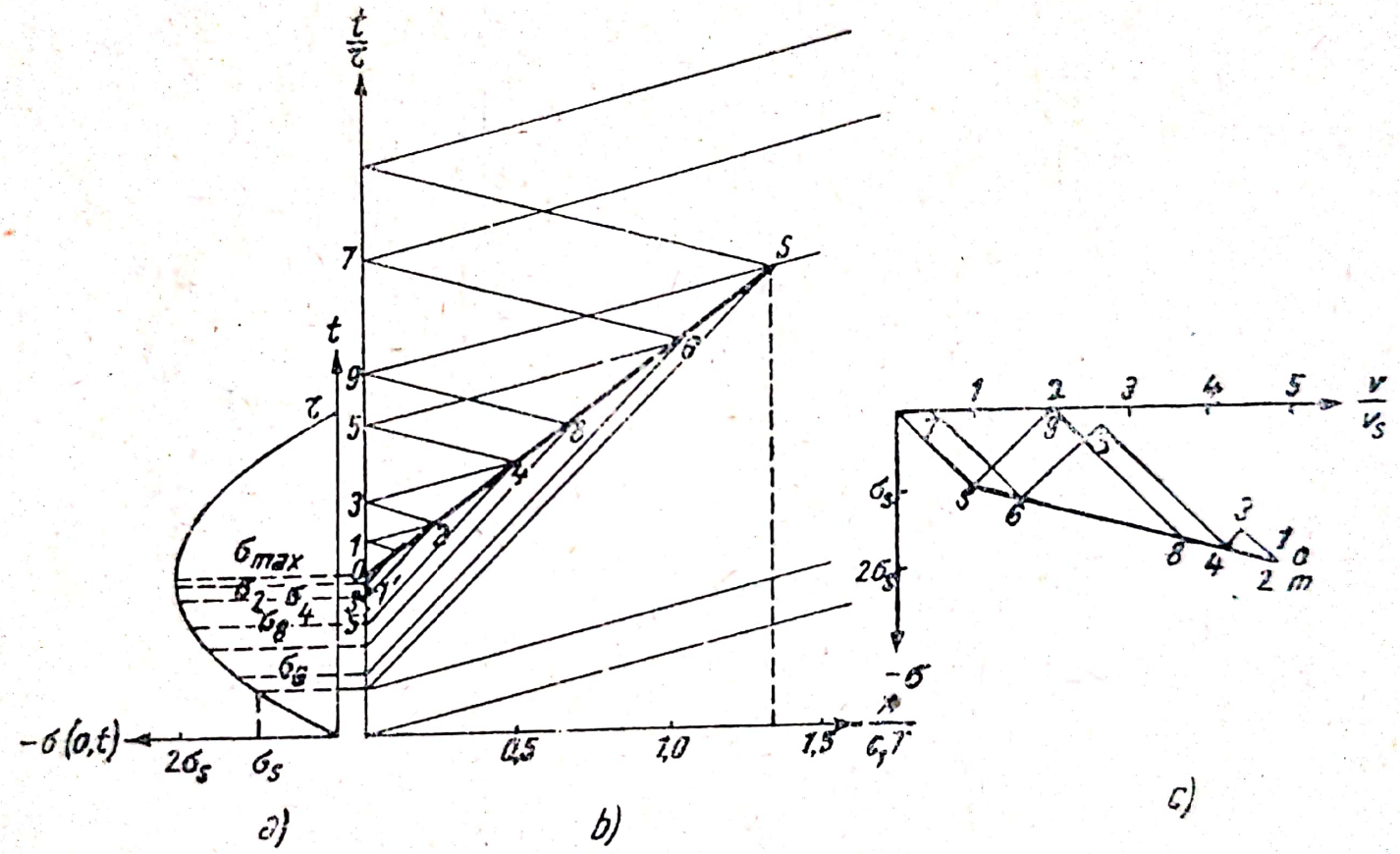

Fig. 17

Deformațiile remanente în fiecare secțiune se obțin din formula

$$\varepsilon^p(x) = [\sigma_m(x) - \sigma_s]\left[\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E}\right]$$

în care $\sigma_m(x)$ este tensiunea maximă în secțiunea respectivă.

c) **Alte lucrări.** *N. F. Lebedev.* [111] a reluat problema găsirii prin aproximație a formei undei de descărcare, cînd se dă la capătul barei semi-infinite legea de variație a tensiunii. Se presupune că tensiunea la capătul barei crește instantaneu și apoi descrește monoton. Materialul este presupus consolidabil liniar.

Pentru obținerea succesivă a diferitelor puncte de pe unda de descărcare, *Lebedev* găsește o formulă de recurență. În felul acesta se poate obține din aproape în aproape tensiunea pe unda de descărcare. Se pune astfel în evidență o serie a cărei convergență se demonstrează, evaluîndu-se și restul. *Lebedev* atrage atenția că metoda propusă nu se mai poate folosi dacă curbura curbei ce dă variația deformației ca funcție de tensiune, este mare. Pentru aceste cazuri este recomandată metoda lui *Șapiro.*

S. D. Mocialov [144] a dezvoltat metoda grafică de studiere a propagării undelor longitudinale elasto-plastice în bare.

E. A. L. Smith [207] a dat unele formule simple pentru calculul numeric al propagării undelor longitudinale în bare. Se consideră în special materialele elastice, dar și cele perfect plastice. Calculele sînt reduse la cele ce se pot face cu ajutorul unui calculator (riglă, mașină de calculat etc.) oarecare.

§ 6. PROPAGAREA UNDELOR ÎN BARE CU SECȚIUNE VARIABILĂ

Problema propagării undelor longitudinale elasto-plastice în bare cu secțiune variabilă, a fost studiată de *G. S. Șapiro* [195]. Problema vibrațiilor elastice în bare cu secțiune variabilă a fost studiată tot de *Șapiro* [194] încă în 1946. În acea lucrare, el stabilește și ecuația de mișcare care este

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{A'(x)}{A(x)}\sigma = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

unde $A(x)$ este aria secțiunilor transversale. În afară de aceasta se mai presupune că materialul este consolidabil liniar. Soluția în domeniul deformațiilor plastice se obține prin construirea rețelei de caracteristice. Metoda folosită este similară cu cea utilizată de *H. A. Rahmatulin* [174] pentru studierea propagării undelor cilindrice.

Scanned with OKEN Scanner

Ca aplicație se consideră o bară conică, cînd ecuația de mișcare se poate integra direct, evitîndu-se integrarea numerică.

§ 7. DETERMINAREA DIAGRAMEI DINAMICE $\sigma \sim \varepsilon$, PENTRU DIFERITE MATERIALE

a) **H. A. Rahmatulin** [180] a indicat cum se poate aplica teoria undei de descărcare expusă mai sus, pentru determinarea diagramei dinamice $\sigma \sim \varepsilon$ pentru diferite materiale. Caracteristicele dinamice ce trebuie determinate sînt modulul de elasticitate, limita de elasticitate și modulul constant sau variabil de consolidare.

Să notăm cu v_0 valoarea absolută a vitezei de lovire la capătul barei. Avem conform formulei (1.19)

$$v_0 = \int_0^{\varepsilon_m} c\,(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{1.104}$$

unde ε_m este deformația maximă a secțiunii de la capătul barei.

Făcînd o serie de experiențe și măsurînd deformațiile remanente $\tilde{\varepsilon}\,(o)$ ale secțiunii de la capătul barei, se obține relația

$$v_0 = v_0\,(\tilde{\varepsilon}). \tag{1.105}$$

Dar între ε_m și $\tilde{\varepsilon}$ există relația

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_m - \frac{\sigma\,(\varepsilon_m)}{E}. \tag{1.106}$$

Introducînd (1.106) și (1.105) în (1.104) obținem

$$v_0\left(\varepsilon_m - \frac{\sigma_m}{E}\right) = \int_0^{\varepsilon_m} c\,(\varepsilon)\,d\varepsilon. \tag{1.107}$$

Derivînd această formulă obținem

$$\frac{dv_0}{d\tilde{\varepsilon}}\left[1 - \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right] = \sqrt{\frac{1}{\rho}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}. \tag{1.108}$$

Pentrucă $\frac{dv_0}{d\tilde{\varepsilon}}$ este o funcție dată de $\varepsilon - \frac{\sigma}{E}$, atunci relația (1.108) este ecuația diferențială care determină funcțiunea $\sigma = \sigma\,(\varepsilon)$. Constanta de integrare se determină din condiția de tangență a curbei $\sigma = \sigma\,(\varepsilon)$ cu dreapta $\sigma = E\,\varepsilon$. Coordonata punctului de tangență reprezintă limita dinamică de elasticitate.

Scanned with OKEN Scanner

Modulul dinamic E se determină din ecuația

$$v_0^* = \int_0^{\varepsilon_s} \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma(\varepsilon, E)}{d\varepsilon}}\, d\varepsilon = c_0 \varepsilon_s . \qquad (1.109)$$

În această formulă v_0^* este determinat experimental și este valoarea maximă a vitezei pentru care nu avem încă o deformație remanentă; $\varepsilon_s = \varepsilon_s(E)$ este limita de elasticitate ce se obține din (1.108) și $\sigma = \varepsilon E$.

Metoda lui *Rahmatulin* expusă mai sus, cere efectuarea unui mare număr de experiențe cu diferite epruvete. *Rahmatulin* atrage atenția că relația dinamică $\sigma \sim \varepsilon$ se mai poate obține mai ușor din studierea distribuției deformațiilor plastice de-a lungul barei lovite (vezi mai jos).

Pentru verificarea teoriei expuse, la Universitatea din Moscova au fost făcute experiențe sub conducerea lui *H. A. Rahmatulin* [180]. Pentru simplificare s-a presupus că materialul este consolidabil liniar. În acest caz relația (1.104) devine $v_s = c_0 \varepsilon_s + c_1 (\varepsilon_m - \varepsilon_s)$, iar deformația plastică (1.106) este $\tilde{\varepsilon} = \left(1 - \frac{E_1}{E}\right)(\varepsilon_m - \varepsilon_s)$. Rezultă deci că deformațiile plastice depind liniar de viteză. Ținîndu-se seama de micimea lui $\frac{E_1}{E}$, vom avea

$$v_0 = c_0 \varepsilon_s + c_1 \tilde{\varepsilon} . \qquad (1.105')$$

Pentru verificarea ultimei relații, s-au făcut experiențe cu bare de aluminiu de lungime de 0,5 m și diametru de aproximativ 2 cm. Aceste experiențe au confirmat bine formula (1.105'). Vitezele de lovire erau cuprinse între 30 și 80 m/s.

Dacă se ia $c_0 = 4700$ m/s, rezultă $\varepsilon_s = 0{,}47\%$. De aici rezultă că limita dinamică de elasticitate este mult mai mare decît cea statică, care pentru aluminiu este de ordinul 0,2%. Pe de altă parte, distribuția deformațiilor plastice are un caracter asimptotic. Aceasta confirmă teoria propagării undelor longitudinale în bare după care deformațiile plastice se propagă pînă la infinit.

H. A. Rahmatulin observă că în realitate, în apropierea punctului $v = c_0 \varepsilon_s$, relația (1.105') nu mai este liniară, dar devierea de la această relație liniară se poate calcula.

b) **O altă metodă de determinare a relației dinamice** $\sigma \sim \varepsilon$ este datorită lui *V. S. Lenski* [124] [125] [126]. Ea revine la măsurarea deformațiilor remanente ale unei bare finite deformată prin lovire longitudinală la un capăt. În lucrarea [124] *Lenski*

Scanned with OKEN Scanner

consideră numai materiale consolidabile liniar. Pentru determinarea diagramei dinamice $\sigma \sim \varepsilon$, trebuie determinate valorile dinamice ale modulului de elasticitate, ale modulului de consolidare și ale limitei de elasticitate.

În altă lucrare [126] *Lenski* consideră problema determinării diagramelor dinamice $\sigma \sim \varepsilon$ pentru materiale consolidabile neliniar. Dacă în barele consolidabile liniar existau una sau mai multe zone în care deformațiile plastice aveau valori constante, pentru materialele consolidabile neliniar, deformația plastică variază în mod continuu în lungul barei lovite.

În metoda lui *Lenski*, cel de-al doilea capăt al barei este presupus liber și deci la acest capăt apare o undă inversă de șoc și de descărcare. Ea se propagă în sens invers, cu viteza c_0. Ecuația frontului ei este

$$x + c_0 t = 2l \tag{1.110}$$

unde $2l$ este lungimea barei. Această undă inversă intersectează undele lui Riemann

$$c\ (\varepsilon) = \frac{x}{t} = \frac{x\, c_0}{2l - x}. \tag{1.111}$$

Din experiențe se cunoaște însă legea de distribuție a deformațiilor plastice, adică relația dintre deformația maximă a unei secțiuni și deformația plastică a aceleiași secțiuni

$$\varepsilon_m - \frac{\sigma\ (\varepsilon_m)}{E} = \tilde{\varepsilon}\ (x). \tag{1.112}$$

Deci $\tilde{\varepsilon}\ (x)$ este o funcție dată de x și deci obținem

$$x = \psi\left(\varepsilon_m - \frac{\sigma\ (\varepsilon_m)}{E}\right),$$

unde ψ este o funcție dată.

Introducînd această relație în (1.111) obținem ecuația diferențială pentru determinarea funcției $\sigma\ (\varepsilon)$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left[\frac{c_0\,\psi\left(\varepsilon_m - \dfrac{\sigma}{E}\right)}{2l - \psi\left(\varepsilon_m - \dfrac{\sigma}{E}\right)}\right]^2. \tag{1.113}$$

Integrînd (1.113) obținem

$$\sigma = \sigma\ (E,\ C,\ \varepsilon).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cele două constante E și C se determină din

$$E\,\varepsilon_s = \sigma(E, C, \varepsilon_s), \quad E = \left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_s}$$

$$\tilde{\varepsilon}_m = \varepsilon_m - \frac{\sigma(E, \varepsilon_m)}{E}, \quad v_0 = \int_{\varepsilon_s}^{\varepsilon_m} \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}\, d\varepsilon + c_0\varepsilon_s. \tag{1.115}$$

Din aceste patru ecuații se determină necunoscutele ε_s, E, ε_m și C.

O reprezentare parametrică a curbei $\sigma \sim \varepsilon$ a fost dată tot de *Lenski* în aceeași lucrare. Se pornește de la (1.112) care se scrie sub forma

$$\frac{d\,\tilde{\varepsilon}(x)}{dx} = \frac{d\,\varepsilon_m}{dx}\left(1 - \frac{1}{c_0^2}\frac{1}{\rho}\frac{d\sigma(\varepsilon_m)}{d\,\varepsilon_m}\right) \tag{1.116}$$

Ținînd seama de (1.111), (1.116) se scrie

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dx} = \frac{d\,\varepsilon_m}{dx}\left[1 - \left(\frac{x}{2l - x}\right)^2\right]$$

sau

$$\frac{d\,\varepsilon_m}{dx} = \frac{\dfrac{d\tilde{\varepsilon}}{dx}}{1 - \left(\dfrac{x}{2l - x}\right)^2}.$$

Printr-o integrare prin părți și ținînd seama că la capătul liber al barei $\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dx} = 0$, obținem reprezentarea parametrică a diagramei $\sigma \sim \varepsilon$ sub forma

$$\varepsilon_m(x) = \varepsilon_s + \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{1 - \left(\dfrac{x}{2l - x}\right)^2} + \int_x^l \frac{x\,[2l - x]\,\tilde{\varepsilon}(x)}{4l\,[l - x]^2}\, dx$$

$$\sigma_m(x) = \sigma_s + \frac{E\,x^2\tilde{\varepsilon}(x)}{4l\,[l - x]^2} + E\int_x^l \frac{x\,[2l - x]\,\tilde{\varepsilon}(x)}{4\,l\,[l - x]^2}\, dx. \tag{1.117}$$

Limita de elasticitate ε_s, se determină din experiențe simple, cu ajutorul formulei $v_1 = c_0\ \varepsilon_s$. Se caută deci viteza minimă v_1 pentru care la capătul barei au apărut deformații plastice. Mărimea acestor deformații plastice este convențională și variază de la caz la caz.

Diagrama dinamică $\sigma \sim \varepsilon$ poate fi determinată și din următoarea experiență [126]. La capătul unei bare semi-infinite se aplică instantaneu o tensiune (sau viteză) care duce materialul dincolo

Scanned with OKEN Scanner

de limita de elasticitate. După ce se menţine un timp τ constantă, tensiunea (sau respectiv viteza) scade brusc la zero. După cum a arătat *Rahmatulin*, de la capătul liber se va propaga atunci o undă de descărcare cu viteza c_0.

Unda de descărcare intersectează undele lui Riemann. Obţinem deci o relaţie analogă cu relaţia (1.111);

$$c(\varepsilon_m) = \frac{c_0\, x}{x + c_0\, \tau}. \tag{1.118}$$

Dacă este cunoscută relaţia $\sigma \sim \varepsilon$, atunci relaţia (1.118) ne dă distribuţia deformaţiilor plastice, de-a lungul barei. În practică, este mai importantă însă problema inversă. Pentru aceasta introducem (1.118) în (1.116). Obţinem

$$\frac{d\varepsilon_m}{dx} = \frac{\dfrac{d\tilde{\varepsilon}}{dx}}{1 - \left[\dfrac{x}{x + c_0\, \tau}\right]^2}$$

sau

$$\varepsilon_m(x) = \varepsilon_s - \int_x^{x_s} \frac{\dfrac{d\tilde{\varepsilon}}{dx}}{1 - \left[\dfrac{x}{x + c_0\, \tau}\right]^2}\, dx. \tag{1.119}$$

Secţiunea x_s se determină din experienţe: secţiunea pînă la care bara s-a deformat plastic. Integrînd (1.119) prin părţi obţinem

$$\varepsilon_m(x) = \varepsilon_s + \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{1 - \left[\dfrac{x}{x + c_0\, \tau}\right]^2} - \frac{\tilde{\varepsilon}(x_s)}{1 - \left[\dfrac{x_s}{x_s + c_0\, \tau}\right]^2} + \int_x^{x_s} \frac{2x[x + c_0\, \tau]\tilde{\varepsilon}(x)}{c_0\, \tau\, [2x + c_0\, \tau]^2}\, dx.$$

Introducînd această expresie a lui $\varepsilon_m(x)$ în (1.112) obţinem reprezentarea parametrică a curbei $\sigma \sim \varepsilon$.

c) **Determinarea experimentală a diagramei dinamice** $\sigma \sim \varepsilon$ pentru diferite materiale şi diferite viteze de deformare a fost făcută de mulţi autori. Vom cita aici lucrările care se referă în special la determinarea caracteristicelor dinamice ale curbei $\sigma \sim \varepsilon$ în domeniul deformaţiilor plastice.

R. M. Davies [51] a determinat experimental raportul dintre limita dinamică şi statică de fluiditate pentru cîteva tipuri de oţel. Epruvetele erau plăci groase din oţelul respectiv, care erau presate pe una din suprafeţele laterale, de o bilă foarte rigidă de oţel. Se ajunge la concluzia că pentru oţel cu conţinut de crom şi nichel,

Scanned with OKEN Scanner

acest raport este aproximativ 1, pentru plăci de blindaj este aproximativ 1,1 iar pentru oțel moale este 2.

Studiul experimental al caracteristicelor dinamice ale unor materiale plastice (polimeri înalți printre care și nylonul, neopanul etc.), a fost făcut de *K. W. Hillier* și *H. Kolsky* [77]. Se determină viteza de propagare a sunetului în materialele respective, și deci modulul dinamic al lui Young etc., și se compară rezultatele obținute pentru diferite materiale. Tot *H. Kolsky* [103] determină experimental diagrama dinamică pentru unele materiale ca: cauciucul natural, perspex, cupru și plumb.

W. R. Campbell [26], [27] a determinat experimental aceste diagrame pentru cupru și oțel. El arată că limita dinamică de elasticitate este mult mai mare decît limita statică.

Deformarea metalelor monocristaline prin șocuri repetate a fost studiată experimental de *Yves Pironneau* [161]. El a construit un aparat pentru tracțiuni rapide ale epruvetelor, mergînd pînă la viteze de 33 m/s. Epruvetele erau dintr-un aliaj de aluminiu și cupru.

J. E. Johnson, D. S. Wood și *D. S. Clark* [96] au determinat diagrama dinamică $\sigma \sim \varepsilon$ pentru aluminiu. Ei au arătat că tensiunile în diagrama dinamică sînt mult mai mari decît în diagrama statică.

Proprietățile dinamice ale barelor lungi de cupru au fost studiate de *E. J. Sternglass* și *D. A. Stuart* [216]. Ei ajung la concluzia că teoria *Donnell-Taylor-Kármán* nu este în concordanță cu experiențele.

Asupra faptului că în experiențele dinamice limita de elasticitate este mult mai mare au atras atenția și *B. D. Harris* și *M. P. White* [73] care au făcut experiențe cu epruvete de oțel.

La o concluzie similară au ajuns și *R. C. Smith, T. E. Pardue* și *I. Vigness* [258] care de asemenea au făcut experiențe cu epruvete din diferite tipuri de oțeluri. Ei au arătat că diagrama dinamică $\sigma \sim \varepsilon$ se ridică mult peste cea statică, iar dacă diagrama statică, posedă o limită de fluiditate bine definită (o discontinuitate a tangentei în acel punct), diagrama dinamică pentru același material este lină.

Influența încărcării dinamice și a temperaturii asupra limitei de fluiditate la fier și oțel, a fost studiată de *J. M. Kraft, A. M. Sullivan* și *C. F. Tipper* [108]. Se arată că temperatura influențează asupra limitei de fluiditate și modifică mecanismul de deformare.

Studiul experimental al proprietăților dinamice ale oțelului a fost făcut și de *J. D. Campbell* și *J. Duby* [28]. Ei ajung la concluzia că limita dinamică de fluiditate poate fi de 2,5 ori mai mare decît cea statică.

Scanned with OKEN Scanner

O metodă experimentală de determinare a deformaţiilor plastice în metale, ce apar datorită unei lovituri, a fost dată de *J. F. Bell* [18]. Metoda se bazează pe măsurarea unghiului de difracţie al unei reţele de pe suprafaţa unei epruvete. Reţeaua considerată are 8300 de linii pe 2,5 cm. Deformaţia epruvetei produce o schimbare a numărului de linii pe centimetru de reţea şi deci o schimbare corespunzătoare a unghiului de difracţie. Sînt date şi unele rezultate numerice privind un anumit aliaj de aluminiu.

Influenţa presiunii hidrostatice şi a temperaturii asupra diferiţilor moduli elastici dinamici (modulul dinamic al compresibilităţii volumice, modulul de rigiditate) a fost studiată experimental de *D. S. Hughes* şi *Christian Maurette* [87]. Materialele considerate au fost: fierul, duraluminiul şi cuarţ topit. Se ajunge la concluzia că modulii elastici dinamici ai acestor materiale pot fi reprezentaţi prin funcţii liniare de presiune şi temperatură.

Studiul proprietăţilor dinamice ale materialelor, poate fi făcut şi cu metode fotoelastice. *H. C. Perkins* [159] recomandă pentru aceasta cauciucul fotoelastic (vezi şi bibliografia dată în această lucrare), *H. Kolsky* anumite materiale plastice transparente [105], iar *E. M. Pugh, R. v. Heine-Geldern, S. Foner* şi *E. C. Mutschler* [169] plăci de sticlă. În felul acesta undele pot fi fotografiate în timpul propagării lor. Cu aparate rapide de filmat, poate fi obţinut tot tabloul propagării, al reflecţiei etc., şi se poate studia şi distrugerea epruvetei respective, cînd tensiunile aplicate sînt foarte mari (explozii). Întrucît materialele foto-elastice obţinuite au un modul de elasticitate foarte mare şi deci viteza de propagare a undelor este foarte mare, experienţele sînt mai greu de realizat. De aceea *A. J. Durelli* şi *W. E. Riley* [56], utilizează un material din familia epoxinelor. Ei determină şi proprietăţile dinamice şi statice ale acestui material. Aceşti autori au arătat că modulul dinamic de elasticitate este mult mai mare decît cel static şi depinde de viteza de deformare. Astfel pentru viteza de deformare 25, modulul dinamic este de aproximativ trei ori mai mare decît cel static. De asemenea valoarea dinamică a coeficientului lui Poisson a fost găsită 0,50, pe cînd cea statică este 0,40.

§ 8. STABILIREA ECUAŢIILOR ÎN COORDONATE EULER

Punerea problemei în coordonate Euler este datorită lui *G. I. Taylor* [219]. Întrucît această lucrare nu am putut-o găsi, voi indica aici cîteva din rezultatele lui *G. I. Taylor*, reproduse în cartea lui *H. Kolsky* [105] Cap. VII, § 2.

Scanned with OKEN Scanner

După cum se știe, pentru a scrie ecuația de mișcare în coordonate Euler, vom nota cu x nu coordonata unei particule materiale ci coordonata unui punct geometric. Viteza unui punct în coordonate Lagrange depinde numai de poziția inițială și de timp, iar accelerația este pur și simplu derivata vitezei în raport cu timpul. În coordonate Euler, viteza într-un punct variază cu timpul t dar pentru că particula materială între timp s-a deplasat, viteza va avea o variație și datorită acestei deplasări.

Dacă viteza unui element de bară este la momentul t egală cu v, centrul acestui element după timpul δt va parcurge spațiul $v\,\delta t$; deci viteza la momentul $t+\delta t$ va fi $v + v\,\delta t\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\delta t$. Deci accelerația acestui element în coordonate Euler va fi $\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}$.

Utilizînd notațiile de la § 1. putem scrie ecuația de mișcare sub forma

$$\frac{\rho_0 A_0}{1+\varepsilon}\left[\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right]\delta x = A_0\frac{\partial \sigma}{\partial x}\delta x$$

sau

$$\frac{\rho_0}{1+\varepsilon}\left[\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \tag{1.120}$$

Întrucît masa unității de lungime a barei, la un moment oarecare este

$$m = \frac{\rho_0 A_0}{1+\varepsilon} \tag{1.121}$$

ecuația de conservare a masei este

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(m\,v). \tag{1.122}$$

Introducînd (1.121) în (1.122) obținem

$$\frac{-\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}{(1+\varepsilon)^2} = -\frac{(1+\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}}{(1+\varepsilon)^2}$$

sau în sfîrșit

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = (1+\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.123}$$

(1.120) și (1.123) sînt ecuațiile problemei noastre. Ele sînt analoge cu ecuațiile propagării undelor plane de amplitudine finită în lichide compresibile.

Scanned with OKEN Scanner

Una din metodele de rezolvare se bazează pe presupunerea că v este funcție numai de deformație

$$v = f(\varepsilon) \tag{1.124}$$

atunci (1.120) devine

$$\frac{\rho_0}{1+\varepsilon}\frac{df}{d\varepsilon}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right] = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \tag{1.125}$$

iar (1.123) devine

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = (1+\varepsilon)\frac{df}{d\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \tag{1.126}$$

Eliminînd între aceste două ecuații expresia $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$, obținem

$$\left(\frac{df}{d\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}. \tag{1.127}$$

Pentru a găsi pe v, trebuie să integrăm această ecuație între două limite care corespund capătului neperturbat al barei ($\varepsilon = 0$) și unui punct oarecare

$$v = -\int_0^{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}\, d\varepsilon. \tag{1.128}$$

Obținem deci, după cum era de așteptat, aceeași expresie a vitezei particulei, ca și cea obținută prin intermediul coordonatelor Lagrange (1.19′).

Introducînd valoarea lui $\frac{df}{d\varepsilon}$ din (1.127) în (1.126) obținem

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \left\{v + [1+\varepsilon]\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}\right\}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$$

sau

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (c+v)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0,$$

unde de data aceasta am notat $c = [1+\varepsilon]\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}$. Deci punctele care se mișcă în spațiu cu viteza $(c+v)$ sînt caracterizate printr-o deformație ε constantă și deci și printr-o tensiune σ constantă. Revenim deci la rezultatele bine cunoscute.

Scanned with OKEN Scanner

a) **Lovirea longitudinală a barei.** În diferite probleme ale teoriei plasticității există posibilitatea de a neglija deformațiile elastice în raport cu cele plastice. Zicem atunci că materialul se comportă « plastic-rigid ». Propagarea undelor longitudinale în bare al căror material se comportă plastic-rigid, a fost studiată de *G. Taylor* [220] și a fost dezvoltată de *E. H. Lee* și *S. J. Tupper* [121]. Ei se refereau în special la problema lovirii unei bare finite de oțel de un perete considerat rigid (o placă groasă de blindaj) (vezi mai departe Cap. IV). *G. Taylor* pornind de la măsurarea deformațiilor barelor scurte, după lovirea lor, și utilizînd schema « plastic-rigidă » propune o metodă de determinare a limitei de fluiditate. *E. H. Lee* și *S. J. Tupper* procedează invers. Ei presupun că relația $\sigma \sim \varepsilon$ pentru materialul respectiv este cunoscută și utilizînd schema « plastic-rigidă » pot da tabloul propagării undelor în timpul lovirii.

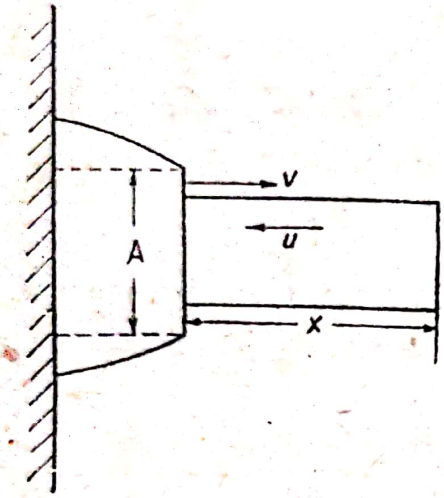

Fig. 18

Presupunerea că materialul barei este plastic rigid revine la aceea că în bară, în timpul lovirii se disting două porțiuni. O porțiune este acea în care frontul undelor plastice nu a ajuns încă. Acea porțiune a barei se comportă ca un corp rigid, și anume ea se mișcă către placa fixă cu o anumită viteză u. Frontul undelor plastice se propagă de la suprafața de contact cu viteza v. După trecerea frontului, materialul rămîne în repaus. Deci cea de-a doua porțiune a barei, porțiune deformată, este în repaus, întrucît materialul fiind plastic-rigid, descărcarea elastică nu mai are loc. Vitezele de mai sus sînt viteze absolute, iar în soluția problemei nu intervine propriu-zis coordonata lagrangeană (fig. 18).

Să notăm cu A și σ aria secțiunii transversale și tensiunea relativă imediat în spatele frontului undei plastice, iar cu A_0 și σ_0 aceleași mărimi în fața frontului undei plastice. Evident că σ_0, este chiar limita de elasticitate a materialului, pentru că materialul din fața undei trebuie considerat ca fiind în pragul deformațiilor plastice; cu alte cuvinte, în momentul lovirii, în mod instantaneu, tensiunea în întreaga bară a devenit $\sigma_s = \sigma_0$ (undele elastice se propagă deci instantaneu).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se neglijează compresibilitatea, ecuaţia de continuitate este

$$(u + v)\ A_0 = vA. \tag{1.129}$$

De aici rezultă deformaţia din spatele frontului undelor plastice

$$\varepsilon = \frac{A - A_0}{A} = \frac{u}{u + v}. \tag{1.130}$$

Notînd cu x lungimea porţiunii de bară, încă nedeformată la un moment oarecare, avem

$$-\frac{dx}{dt} = u + v\ . \tag{1.131}$$

Ecuaţia de mişcare, într-o parte şi alta a frontului undelor plastice este

$$\rho\,[u + v]\,A_0\,u = [\sigma - \sigma_0]\,A_0. \tag{1.132}$$

Ecuaţia de mişcare a porţiunii rigide este

$$\rho x \frac{du}{dt} = -\sigma_0. \tag{1.133}$$

Eliminînd pe dt din (1.131) şi (1.133), şi ţinînd seama de (1.130) obţinem

$$d\,(\rho\,u^2) = 2\,\frac{\sigma_0 \varepsilon}{x}\,dx. \tag{1.134}$$

Utilizînd (1.130) şi (1.132) obţinem

$$\ln\,x^2 = \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\,[(\sigma - \sigma_0)\varepsilon]}{\sigma_0\,\varepsilon}. \tag{1.135}$$

Folosind notaţia

$$f\,(\sigma) = \frac{1}{\sigma_0}\left[\sigma\,[1 + \ln\,\varepsilon] - \int_{\sigma_0}^{\dot{\sigma}} \ln\,\varepsilon\,d\sigma\right] - \ln\,\varepsilon, \tag{1.136}$$

obţinem

$$\ln\,x^2 = f\,(\sigma) - f\,(\sigma_1). \tag{1.137}$$

Tensiunea iniţială σ_1 se determină din ecuaţiile (1.130) şi (1.132);

$$\rho\ U^2 = \varepsilon_1\,[\sigma_1 - \sigma_0] \tag{1.138}$$

unde U este viteza de lovire, iar ε_1 este deformaţia maximă.

Funcţiunea $f\ (\sigma)$ poate fi determinată direct din curba $\sigma \sim \varepsilon$ care se presupune dată, şi deci există posibilitatea găsirii distribuţiei deformaţiilor plastice.

Scanned with OKEN Scanner

Experienţele făcute de *Lee* şi *Tupper* pe epruvete de oţel au confirmat bine consideraţiile teoretice.

Să stabilim acum formula lui *G. Taylor* pentru determinarea limitei de fluiditate. Din (1.131) şi (1.133), ţinînd seama că frontul undei plastice se propagă cu viteza constantă $v = C$ şi că $\sigma_0 = \sigma_s$ obţinem

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sigma_s}{\rho x [u + C]}. \tag{1.139}$$

Prin integrare obţinem

$$\frac{\sigma_s}{\rho} \ln\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{2} u^2 + Cu - \frac{1}{2} U^2 - CU, \tag{1.140}$$

unde l este lungimea iniţială a barei. Să notăm cu X porţiunea de bară ce rămîne nedeformată după lovire şi a cărei lungime se poate măsura. Din (1.140). pentru $u = 0$ rezultă $x = X$, şi deci

$$\frac{\sigma_s}{\rho} \ln\left(\frac{X}{l}\right) = -\frac{1}{2} U^2 - CU. \tag{1.141}$$

Epruvetele considerate de *Taylor* erau de fapt nişte proiectile cilindrice, care erau trase asupra unui blindaj foarte gros. Dacă frînarea capătului nelovit al proiectilului este riguros uniformă, $\frac{C}{U}$ poate fi determinat, ţinînd seama că timpul de frînare este egal cu $\frac{l_1 - X}{C}$ (unde l_1 este lungimea totală a proectilului după lovire) şi de asemenea cu $\frac{2(l - l_1)}{U}$. Deci $\frac{C}{U} = \frac{1}{2} \frac{l_1 - X}{l - l_1}$, iar ecuaţia (1.141) devine

$$\frac{\sigma_{s1}}{\rho U^2} = \frac{l - X}{2(l - l_1)} \ln \frac{l}{X} \tag{1.142}$$

unde σ_{s1} este o valoare particulară a lui σ_s, cînd se presupune că frînarea este uniformă. Pentru că în practică, în placa lovită apare o depresiune, notînd cu d adîncimea acestei depresiuni măsurată după lovire, în formula (1.142) trebuie să înlocuim l_1 cu $l_1 - d$. Formula (1.142) dată de *G. Taylor* a fost utilizată de *A. C. Whiffin* [235] pentru determinarea experimentală a limitei de fluiditate.

Scanned with OKEN Scanner

Concluzia la care ajunge *Whiffin*, și anume că σ_s este aproape independent de U trebuie pusă în legătură cu faptul că ecuația (1.142) este doar aproximativă. *G. Taylor* calculează și eroarea ce intervine în (1.142) datorită faptului că în realitate frînarea nu este uniformă. Whiffin a făcut experiențe cu epruvete scurte de oțel, duraluminiu, cupru, plumb, fier și argint. Epruvetele au fost cilindrice. Ele au fost introduse sub formă de gloanțe într-o armă de foc, și apoi trase asupra unui blindaj gros. În cadrul aceleeași probleme, *W. E. Carrington* și *M. L. V. Gayler* [29] studiază modificarea microstructurii provocată de lovirea cu mare viteză a epruvetei. Ei folosesc epruvete de oțel, duraluminiu și argint, iar viteza de lovire era cuprinsă aproximativ între 81 și 1167 m/s.

b) **Lovirea transversală a barei.** Vom da pe scurt cîteva indicații bibliografice privind această problemă. Problema lovirii transversale a unei bare lungi (presupusă teoretic nemărginită) și studiul deformațiilor plastice ce rezultă în acest fel, a fost considerată de *P. E. Duwez, D. S. Clark* și *H. E. Bohnenblust* [58]. Au fost făcute și experiențe pentru un anumit tip de oțel și cupru. Rezultatul principal obținut este că deformația, care de data aceasta depinde de raportul $\frac{x^2}{t}$, se propagă cu viteză variabilă. Între momentul încovoietor și curbură s-a presupus că există o relație liniară în domeniul elastic. În domeniul plastic ea se reprezintă printr-o dreaptă orizontală sau oblică. Curba moment încovoietor-curbură ține, în aceste probleme, locul curbei tensiune-deformație.

O metodă mai simplificată, în sensul neglijării deformațiilor elastice (și deci considerarea materialului ca fiind perfect plastic-rigid) a fost dezvoltată de *E. H. Lee* și *P. S. Symonds* [120] și *P. S. Symonds* și *C. Leth* [217]. Barele sînt presupuse scurte, iar sarcina este aplicată în centrul lor. Aceeași problemă, dar pentru bare elasto-plastice, a fost considerată de *R. C. Alverson* [8]. *M. F. Conroy* [35] a dezvoltat teoria din [58], tot pentru bare lungi, dar pentru materiale plastic-rigide, cu sau fără consolidare. Ulterior el a dezvoltat aceste rezultate pentru cazul barei semi-infinite, încărcată transversal la capătul ei [37]. Materialul este considerat elastic-perfect plastic și perfect plastic-rigid. Rezultatele lui *Conroy* au fost dezvoltate apoi de *H. G. Hopkins* [80] pentru bare semi-infinite, plastic-rigide fără consolidare, de asemenea încărcate cu o forță concentrată la capăt. Se presupune însă că viteza de impact este variabilă, raportul dintre această viteză și timp, rămînînd însă constant. Problema barei finite, incastrată și lovită transversal la capătul liber cu un ciocan, a fost considerată de *E. W. Parkes* [157]. El consideră materialul perfect plastic-rigid și examinează două

Scanned with OKEN Scanner

cazuri, după cum masa ciocanului este mare sau mică. Se dau şi rezultate experimentale. În lucrarea [201] *J.A. Seiler* şi *P.S. Symonds* consideră tot bare finite şi materialul plastic-rigid, dar sarcina este aplicată în centrul barei, pe o porţiune finită a ei. Se arată că este posibilă apariţia în bară a mai multor regiuni plastice. *M. F. Conroy* [36] a arătat că dacă materialul barei este consolidabil liniar, deformaţiile plastice ale barei se pot determina prin metode utilizate în probleme elastice. Problema barei plastic-rigide, ce posedă o masă, a fost considerată de *T. J. Mentel* [137]. El consideră tot bare finite simplu sprijinite sau incastrate. Bara posedă o masă, constantă pe unitatea de lungime, precum şi o masă concentrată în mijlocul ei. Se studiază care este efectul unei sarcini dinamice uniform distribuite, asupra unei bare de acest tip. Comportarea barelor încastrate la ambele capete şi încărcate dinamic cu o forţă concentrată ce variază în timp şi care este aplicată în mijlocul lor, a fost considerată de *W. T. Thomson* [225]. Pentru rezolvarea problemei se construieşte o schemă analogă electronică, cu ajutorul căreia se obţin cîteva soluţii elasto-plastice ale flexiunii barelor.

J. A. Seiler, *B. A. Cotter* şi *P. S. Symonds* [202] au considerat problema unei bare, finită şi uniformă, supusă unei încărcări dinamice de formă sinusoidală (distribuţia vitezelor iniţiale este sinusoidală). Bara este presupusă simplu rezemată. Se dau atît soluţia elasto-plastică cît şi cea plastic-rigidă şi se compară rezultatele obţinute cu aceste două soluţii. Se discută cazurile cînd se poate aplica teoria « plastic-rigidă ».

Problema vibraţiilor elasto-plastice a unei bare finite ce are capetele libere, a fost considerată de *H. H. Bleich* şi *M. G. Salvadori* [247]. Se consideră că materialul barei este elasto-perfect-plastic, iar forţele dinamice aplicate sînt normale barei şi distribuite după o lege oarecare de-a lungul ei. Aceeaşi problemă pentru bare plastic-rigide cînd este posibilă apariţia mai multor articulaţii plastice a fost considerată de *B. A. Cotter* şi *P. S. Symonds* [248]. Studiul apariţiei articulaţiilor plastice la o bară plastic-rigidă şi liberă la capete a fost considerată şi de *M. G. Salvadori* şi *F. DiMaggio* [257] pentru cazul unor încărcări distribuite după o anumită lege de-a lungul barei.

O altă problemă oarecum înrudită cu cele de mai sus, şi anume problema aplicării unei forţe concentrate ce depinde de timp, unui inel ce se comportă perfect plastic-rigid, a fost considerată de *R.H. Owens* şi *P. S. Symonds* [154]. Se studiază deformaţiile inelului, cînd, după cum am spus, deformaţiile elastice sînt neglijabile în raport cu cele plastice. Metoda utilizată este similară cu aceea utilizată la studiul lovirii transversale a barelor.

Scanned with OKEN Scanner

Într-o lucrare recentă *P. S. Symonds* [218] analizează metodele convenabile pentru studiul deformațiilor plastice, provocate în construcții, prin încărcări dinamice. Se compară rezultatele obținute considerînd materialul elastic și perfect plastic, cu rezultatele obținute considerînd efecte secundare: consolidare, viteza de deformare și contracția axială. Sînt date ca exemple: bare cărora li se atașează o masă, arce, inele, plăci circulare și pînze axial simetrice. Sînt considerate diferite tipuri de încărcări. Se dau corecțiile pentru aceste efecte secundare.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

INFLUENȚA VITEZEI DE DEFORMARE

§ 1. LEGEA DE CURGERE

În toate considerațiile făcute în capitolul precedent, studiindu-se propagarea undelor în bare semi-infinite, s-au adoptat relații între tensiuni și deformații care nu conțineau și viteza de deformare. Aceste considerații pot fi deci aplicate numai acelor materiale, pentru care influența vitezei de deformare asupra relației tensiune-deformație este neglijabilă în problemele dinamice. Mai mulți autori pe care îi vom cita mai jos, au atras însă atenția că în problemele dinamice este necesar să se țină seama de influența vitezei de deformare. Există materiale în a căror relație dinamică $\sigma \sim \varepsilon$, viteza de deformare nu poate fi neglijată. La această concluzie au ajuns și mai mulți experimentatori. Citãm aici numai cîteva lucrări. *E. J. Sternglass* și *D. A. Stuart* [216] au făcut experiențe cu niște bare lungi de cupru, lovite longitudinal cu un ciocan. *E. H. Lee* și *H. Wolf* [123] studiază influența vitezei de deformare, referindu-se în special la experiențe de lovire a unor epruvete scurte de cupru cu un piston. *J. D. Campbell* și *J. Duby* [28] arată că mecanismul curgerii plastice pentru mari viteze de deformare, diferă de mecanismul curgerii obișnuite. Diferența dintre proprietățile dinamice și statice ale diferitelor metale a fost studiată experimental și de *S. B. Ainbinders* [3], [4]. *G. Gerard* și *R. Papino* [63] arată experimental că pentru viteze de deformare de ordinul a 1 s^{-1}, la aluminiu recopt nu se observă o diferență importantă între experiențele dinamice și statice. Ei arată însă că la oțel moale, în experiențele dinamice limita de fluiditate poate crește cu 80%. *J. B. Hawkyard* și *P. Freeman* [74] studiază experimental curbe $\sigma \sim \varepsilon$ pentru diferite metale, viteza de deformare fiind cuprinsă între 100 și 600 s^{-1}. Se găsește că raportul dintre limita dinamică de fluiditate și cea statică pentru oțel cu 0,1% carbon este 1,85

pentru viteza de deformare 600 s^{-1}, şi 1,70 pentru viteza de deformare 300 s^{-1}. Pentru oţel cu 0.28% carbon, acest raport este de 1,31 la viteza de deformare 450 s^{-1} şi 1,23 la viteza de deformare 260 s^{-1}. Pentru un aliaj cu 99,7% aluminiu, el este 1,45 pentru viteza de deformare 500 s^{-1} şi 1,05 pentru viteza de deformare 620 s^{-1}.

S-au propus deci teorii ale propagării undelor în bare, ţinîndu-se seama de influenţa vitezei de deformare.

În stabilirea relaţiei dintre tensiune şi deformaţie, în care să se ţină seama de viteza de deformare, s-a pornit de la relaţia propusă de *P. Ludwik* [131] şi *L. Prandtl* [168]. Aceşti autori au găsit că pentru o aceeaşi mărime a deformaţiei plastice, relaţia dintre tensiune şi viteza de deformare este de forma

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_0 \ln \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\dot{\varepsilon}_0^p}$$

unde σ_1, σ_0 şi $\dot{\varepsilon}_0^p$ sînt constante, iar ε^p este partea plastică a deformaţiei totale, adică $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$. O relaţie de acest tip a fost considerată de *P. M. Oghibalov* şi *M. A. Loghinova* [153] pentru studiul propagării undelor longitudinale în bare, ţinîndu-se seama şi de influenţa vitezei de deformare. Această relaţie a fost dealtfel utilizată sau verificată experimental (v. de exemplu [208] în care sînt propuse şi alte relaţii între tensiune şi viteza de deformare) de foarte mulţi autori.

L. E. Malvern [135] a pornit de la aceeaşi relaţie pe care o pune însă sub forma, mai generală:

$$\sigma = f(\varepsilon) + a \ln (1 + b\,\dot{\varepsilon}^p) \tag{2.1}$$

unde $\sigma = f(\varepsilon)$ este relaţia statică $\sigma \sim \varepsilon$, iar a şi b sînt constante caracteristice materialului respectiv. Relaţia (2.1) se mai poate scrie astfel

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{e^{\frac{\sigma - f(\varepsilon)}{a}} - 1}{b} \tag{2.2}$$

Ultima relaţie sugerează o generalizare, în sensul că viteza de deformare plastică ε^p este o funcţie de $\sigma - f(\varepsilon)$, adică de diferenţa dintre tensiunea dinamică şi cea statică corespunzătoare aceleeaşi deformaţii. O relaţie generalizată în acest sens a fost utilizată de *V. V. Sokolovski* [209], [211] şi de *R. J. Rubin* [192] sub forma

$$E\,\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + F(\sigma - f(\varepsilon)) \tag{2.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $F(z)$ este o funcție ce trebuie să satisfacă condițiilor $F'(z) > 0$ și $F(0) = 0$, iar E este modulul de elasticitate.

În general putem să luăm

$$E\,\dot{\varepsilon}^p = g(\sigma,\ \varepsilon). \tag{2.4}$$

Partea elastică a deformației va fi furnizată de legea lui *Hooke*, în care chiar în problemele dinamice în general se consideră că nu intervine viteza de deformare

$$E\,\dot{\varepsilon}^e = \dot{\sigma}. \tag{2.5}$$

Această presupunere nu se poate face pentru toate materialele și orice experiență. A se vedea de exemplu lucrările lui *H. Kolsky* [104], [106]. El a determinat experimental diagrama $\sigma \sim \varepsilon$ pentru unele tipuri de cauciuc și unii polimeri înalți, cînd impulsul la capătul barei era de foarte scurtă durată. Se arată că cu creșterea vitezei de deformare, modulul de elasticitate pentru aceste materiale crește foarte mult; diagrama dinamică diferă mult de cea statică.

La o concluzie similară au ajuns și *A. J. Durelli*, *W. F. Riley* [48] făcînd experiente cu un material foto-elastic din familia epoxinelor. Pentru alte materiale însă, în special pentru metale, se poate presupune că viteza de deformare nu influențează modulul lui Young.

Din (2.4) și (2.5) obținem relația generală care leagă tensiunea, deformația și viteza de deformare

$$E\,\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + g(\sigma,\ \varepsilon). \tag{2.6}$$

Aceasta este legea de curgere ce se adoptă atunci cînd materialul se deformează plastic. Pentru deformațiile inițiale elastice, sau pentru descărcare se utilizează relația (2.5). Relația (2.6) a fost propusă de *Malvern* [135].

Pentru a se putea face calcule efective, funcția $g(\sigma, \varepsilon)$ a fost particularizată în diferite moduri. Cea mai des utilizată este o expresie liniară a ei, de forma

$$g(\sigma,\ \varepsilon) = k\,[\sigma - f(\varepsilon)] \tag{2.7}$$

unde k este o constantă. O expresie liniară de tipul (2.7), dar pentru materiale perfect plastice (deci $g(\sigma,\varepsilon) = k\,[|\sigma| - \sigma_s]$) a fost utilizată de *V. V. Sokolovski* [211] pentru studiul propagării undelor zise elasto-vîsco-plastice, în bare. O relație similară ($\mu\dot{\varepsilon}^p = \sigma - \sigma_s \operatorname{sign} \sigma$) a fost utilizată de *Hans Richter* [183] pentru studierea propagării undelor plane în bare cu secțiune constantă, cînd materialul nu este consolidabil, dar este relaxabil la încărcări dinamice. De altfel relații de tipul (2.7) au fost propuse mai demult pentru descrie-

Scanned with OKEN Scanner

rea proprietăților mecanice (numite cîteodată și reologice) ale diferitelor materiale.

Astfel *K. Hohenemser* și *W. Prager* [79] au propus relația

$$\dot{\sigma} + \alpha\sigma = \beta\dot{\varepsilon} + \gamma\varepsilon \tag{2.8}$$

unde α, β și γ sînt constante fizice. Relația (2.8) corespunde așa numitului corp «liniar standard», care se reprezintă schematic, de exemplu, prin legarea în paralel a unui element Maxwell și a unui element Hookean [1]). Studierea propagării undelor în corpuri de acest tip, a fost făcută de *A. I. Işlinski* [93]. El a considerat problema propagării undelor longitudinale în bare, al căror material, în afară de proprietăți elastice, mai posedă și proprietăți de fluaj și relaxare, descrise de relația (2.8). De remarcat că în relația (2.8), în afară de viteza de deformare, mai intervine și așa zisa viteză a tensiunii. Aceeași relație (2.8) a fost utilizată de *N. F. Astburg* [11] pentru studiul proprietăților dinamice ale unor materiale plastice, precum și de *D. S. Berry* și *S. C. Hunter* [19], pentru studiul propagării undelor mecanice în bare subțiri vîsco-elastice. Ultimii autori studiază problema considerînd mai multe tipuri de condiții la limită și utilizînd teoria transformării Laplace. Bara este considerată atît finită cît și infinită.

Studiul propagării undelor longitudinale în bare, al căror material este inelastic și anume de tip Maxwell, a fost făcut de *E. H. Lee* și *I. Kalner* [118]. În acest caz relația dintre tensiune și deformație este de forma

$$\dot{\sigma} + \alpha\sigma = \beta\dot{\varepsilon} \tag{2.9}$$

[corpurile în care derivata tensiunii este funcție de tensiune și de viteza de deformare sînt numite astăzi «hipo-elastice» (v. [67]) iar ecuația de mișcare la care se ajunge și pe care ei o integrează prin metode aproximative este

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \mu\rho\,\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \tag{2.10}$$

unde μ este coeficientul de vîscozitate și ρ densitatea.

Studiul propagării perturbațiilor în corpuri de tip Voight (numite și corpuri cu elasticitate întîrziată) a fost făcut de *I. N. Zverev* [243] și mai tîrziu de *S. K. Ghosh* [64] și de *J. A. Morrison* [147]. Schematic aceste corpuri pot fi reprezentate, după cum se știe, de legarea în paralel a unui element Hook și a unui element

[1]) Pentru mai multe detalii, privind modelele utilizate în reologie, vezi *T. Alfrey* [5], *C. Zener* [244] și *B. Gross* [68].

vîscos newtonian. În acest caz, relaţia dintre tensiune şi deformaţie este de tipul

$$\sigma\ (x,\ t) = E\varepsilon + \mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\ . \tag{2.11}$$

Ecuaţia diferenţială care guvernează mişcarea şi pe care *Zverev* o integrează tot prin metode operaţionale este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} \tag{2.12}$$

Ghosh rezolvă ecuaţia (2.12) pentru cazul cînd forţa aplicată la capăt variază periodic. Ecuaţia (2.12) a fost utilizată mai tîrziu şi de *H. Hanin* [72] pentru studiul propagării perturbaţiilor într-un mediu vîsco-elastic. El o integrează de asemenea prin metode variaţionale, considerînd trei cazuri: corpuri nemărginite, mărginite de o suprafaţă liberă sau de una fixă.

O concluzie importantă la care ajunge *Zverev* şi care rezultă imediat din (2.12) este că viteza de propagare a frontului undelor este nemărginită. Studiul propagării se poate face totuşi, întrucît partea principală a perturbaţiei se propagă cu o viteză finită. Nu se poate utiliza însă teoria caracteristicelor şi a propagării undelor în sensul lui Hadamard.

Consideraţii similare cu cele pe care Zverev le face pentru corpuri Voight, le face şi pentru corpurile vîsco-plastice, cînd relaţia dintre tensiuni şi deformaţii este de forma

$$\sigma = \sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s) + \mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \tag{2.13}$$

E_1 fiind modulul constant de consolidare. Şi în acest caz este de integrat ecuaţia (2.12).

Materiale vîsco-elastice şi mai complexe au fost studiate din punct de vedere dinamic de *C. J. Thorne* [226]. Materialul considerat de el se poate reprezenta schematic prin legarea în serie a unui element Maxwell şi a unuia Hookean, elementul avînd şi masă. Acestui model i se ataşează un circuit electric echivalent. *R. D. Glauz* şi *E. H. Lee* [65] au considerat problema propagării undelor longitudinale în bare al căror material posedă proprietăţi mecanice descrise de aşa numitul « model A » în nomenclatura lui *T. Alfrey* [5]. Acest model se poate obţine prin legarea în serie a unui element Hook, a unui element Voight şi a unui element vîscos newtonian. Ecuaţiile sînt deci

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \text{ şi } E_1\varepsilon_1 + E_2\varepsilon_2 + \mu_2\dot{\varepsilon}_2 = \mu_3\dot{\varepsilon}_3 = \sigma \tag{2.14}$$

în care E_1, E_2, μ_2 şi μ_3 sînt constante fizice (elastice şi vîscoase).

Scanned with OKEN Scanner

Într-o lucrare recentă, *E. H. Lee* și *J. A. Morrison* [119] consideră problema propagării vitezelor sau tensiunilor în bare subțiri, făcute din diferite materiale vîsco-elastice. Se compară rezultatele obținute pentru diferite scheme vîsco-elastice utilizate, cu scopul de a vedea care este schema cea mai simplă ce se poate utiliza într-o anumită problemă dinamică. Se consideră pentru aceasta șapte scheme: corpul perfect elastic, corpul vîscos newtonian, corpul Voight, corpul Maxwell, corpul liniar standard și așa zisul model A.

Într-un ciclu de lucrări, *E. H. Lee* și *D. R. Bland* [117], [21], [116], [22] consideră următoarele probleme: a) determinarea cu ajutorul măsurătorilor dinamice a proprietăților materialelor vîsco-elastice; b) deducerea din aceste măsurători a relației tensiune-deformație sau a modelului vîsco-elastic corespunzător; c) pe baza acestora, analiza distribuției de tensiuni în materialele respective. Prin « dinamic » autorii înțeleg experiențe în care tensiunile sau deformațiile variază în timp, în ecuațiile de mișcare ținîndu-se seama și de termenii inerțiali. Spre deosebire de alți autori citați mai sus, *Lee* și *Bland* în analiza pe care o fac, nu consideră de la început că materialul satisface unei forme particulare a relației tensiune-deformație, ci rezultatele se bazează pe legea generală vîsco-elastică între tensiuni și deformații, scrise sub forma

$$P(\sigma) = Q(\varepsilon)$$

unde P și Q sînt operatori diferențiali liniari de forma

$$P = \sum_{o}^{p} p_r \frac{\partial^r}{\partial t^r}, \quad Q = \sum_{o}^{q} q_r \frac{\partial^r}{\partial t^r}.$$

Autorii consideră că cele mai convenabile experiențe în vederea măsurătorilor sînt oscilațiile de frecvență dată. În funcție de această frecvență se determină parametrii ce definesc proprietățile mecanice ale materialului respectiv.

Studiul dinamic al corpurilor elastice cu proprietăți ereditare a fost făcut de *E. Volterra* [229]. El a considerat o relație dintre tensiuni și deformații, de forma

$$\sigma = E\varepsilon(t) + \int_{o}^{t} \Phi\ (t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\, d\tau \qquad (2.15)$$

în care funcția ereditară $\Phi(t)$ este de forma $\Phi(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i\ e^{-\alpha_i t}$; A_i și α fiind constante. Un corp satisfăcînd unei asemenea relații

între tensiuni și deformații este numit cu «ereditate de ordinul n». Schematic el se reprezintă prin legarea în paralel a n elemente Maxwell și a unui element hookean.

O relație similară cu (2.15), dar pentru cazul tridimensional a fost utilizată de *Yoh-Han Pao* [156] pentru studiul ciocnirii a două corpuri vîsco-elastice.

Studiul propagării perturbațiilor în medii vîsco-elastice ce satisfac relația

$$\sigma(x, t) = AE \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} [1 - \psi(t - \tau)] \, d\tau$$

în care $\psi(t)$ este o funcție de relaxare, a fost făcut de *R. Sips* [205].

Tot o relație de forma (2.15) a fost propusă de *E. Volterra* [230] pentru reprezentarea diagramei dinamice $\sigma \sim \varepsilon$ la anumite materiale plastice. Dacă $\sigma = f(\varepsilon)$ este relația statică, *Volterra* propune pentru relația dinamică $\sigma \sim \varepsilon$:

$$\sigma = f(x) + \int_0^t \Phi(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \, d\tau. \tag{2.16}$$

E. Volterra, R. A. Eubanks și *D. Muster* [231] au căutat să verifice experimental dacă proprietățile dinamice ale anumitor materiale plastice sau ale cauciucului sînt mai bine reprezentate de o relație de tipul (2.16) sau una de tipul (2.11). Concluzia la care se ajunge este că în procesele dinamice vîscozitatea este dominantă, și deci este preferabil să se utilizeze o relație de tipul (2.11). De remarcat că modulul de elasticitate și coeficientul de vîscozitate nu mai sînt invarianți, ci trebuie considerați funcții de deformația maximă.

Studiul vibrațiilor longitudinale ale unei bare semiinfinite ce nu este perfect elastică a fost făcut și de *D. I. Șilkrut* [203] care pentru descrierea proprietăților mecanice ale materialului respectiv a considerat o relație reologică de forma

$$\sigma(x, t) = E\left[\varepsilon(x, t) - \int_0^t K_1(t - \tau) \varepsilon(x, \tau) \, d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_0^t K_2(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon(x, \tau)}{\partial \tau} \, d\tau \right] \tag{2.17}$$

E fiind modulul dinamic de elasticitate, iar $K_i\,(t-\tau)$ sînt funcţii ce se determină experimental. Ecuaţia respectivă de mişcare este atunci de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, K_1\,(t-\tau)\,d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_0^t \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\, K_2\,(t-\tau)\,d\tau\right]. \qquad (2.18)$$

Interesante consideraţii privind vitezele de propagare ale perturbaţiilor în medii ce nu sînt perfect elastice, au fost făcute de *D. I. Şilkrut* [204]. El a arătat că partea principală a perturbaţiilor se propagă cu o viteză mai mică decît viteza de propagare a frontului undelor, şi a dat şi o formulă aproximativă care leagă cele două viteze.

M. I. Rozovski [191] a utilizat ecuaţii integrale introduse de *V. Volterra* [232] pentru a studia cîteva probleme dinamice ale corpurilor elastice cu proprietăţi de postefect.

Studiul mecanicii corpurilor elasto-vîsco-plastice mai complexe, în care relaţia $\sigma \sim \varepsilon$ este de forma

$$\left(\alpha + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \nu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\sigma = s_0 + \left(G + \eta\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z}$$

a fost făcut de *A. I. Gubanov* [70].

În afară de lucrările citate mai sus, o serie de alţi autori au utilizat diferite modele reologice pentru descrierea proprietăţilor dinamice ale diferitelor materiale. Majoritatea acestor lucrări se referă însă la vibraţii mici şi de aceea nu le vom mai cita.

Revenind la relaţia liniară (2.7), vom observa că ea a mai fost utilizată pentru calculul efectiv al propagării undelor plastice longitudinale în bare, cînd se ţine seama de influenţa vitezei de deformare, de către *L. E. Malvern* [135] şi apoi de *R. J. Rubin* [192]. Acesta din urmă consideră numai materiale consolidabile liniar, deci

$$g\,(\sigma, \varepsilon) = 2k\,[\sigma - E_1\varepsilon] \qquad (2.7')$$

E_1 fiind modulul constant de consolidare.

În afară de expresia liniară (2.7) au mai fost utilizate pentru calcule efective şi alte funcţii. Astfel *V. V. Sokolovski* [211] pentru

studiul propagării undelor elasto-visco-plastice în bare, a utilizat expresii de forma

$$g(\sigma, \varepsilon) = \sigma_s \left[\frac{|\sigma| - \sigma_s}{\sigma_s}\right]^{\nu} \text{ sau } \quad g(\sigma, \varepsilon) = \sigma_s \operatorname{sh} \frac{|\sigma| - \sigma_s}{\nu \sigma_s} \tag{2.19}$$

în care ν este o constantă fizică. Deși calculele făcute de *V. V. Sokolovski* se referă la o funcție oarecare $g(\sigma, \varepsilon)$, el a particularizat apoi rezultatele pentru cele trei expresii particulare (2.19) și (2.7), ale acestei funcții. În toate aceste trei cazuri calculele se simplifică și pot fi făcute eventuale aplicații numerice.

Întrucît relația statică $\sigma = f(\varepsilon)$ este considerată ca o succesiune de stări de echilibru, pentru ca curgerea plastică să aibă loc și pentru a putea aplica relația (2.6), trebuie să fie satisfăcută și condiția de plasticitate

$$\sigma > f(\varepsilon)$$

care pentru expresiile particulare ale funcției $g(\sigma, \varepsilon)$, propuse de *V. V. Sokolovski* se scrie sub forma $|\sigma| \geqslant \sigma_s$.

§ 2. ECUAȚIILE

Ecuațiile de mișcare pentru curgerea plastică, așa cum au fost stabilite de *L. E. Malvern* [134], [135] ținînd seama de influența vitezei de deformare sînt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ E \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon) \end{aligned} \tag{2.21}$$

în care v este viteza particulelor dintr-o anumită secțiune a barei, iar x coordonata Lagrange. A treia relație (2.21), care este chiar relația (2.6), conține ca un caz particular (liniar) corpul lui Maxwell. Ea corespunde deci în general unei vîscozități neliniare (nenewtoniene) a corpului.

Caracteristicele sistemului (2.21) sînt date de

$$dx = 0, \quad dx - c_0\, dt = 0, \quad dx + c_0\, dt = 0. \tag{2.22}$$

Scanned with OKEN Scanner

Este interesant de remarcat că în corpul lui *Malvern* (satisfăcînd ecuaţiile (2.21)) viteza de propagare a undelor este constantă şi egală cu cea elastică $c_0^2 = \frac{E}{\rho}$.

Relaţiile diferenţiale satisfăcute pe caracteristicele (2.22) sînt respectiv

$$\begin{aligned} E\,d\varepsilon - d\sigma &= g(\sigma, \varepsilon)\,dt \\ d\sigma - \rho c_0\,dv &= -g(\sigma, \varepsilon)\,dt \\ d\sigma + \rho c_0\,dv &= -g(\sigma, \varepsilon)\,dt. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ecuaţiile (2.22) dau suprafeţele de discontinuitate, iar ecuaţiile (2.23), în care înlocuim diferenţialele prin diferenţe finite, se utilizează pentru integrarea numerică.

În [135] *Malvern* rezolvă numeric ecuaţiile (2.21) şi compară rezultatele obţinute cu cele furnizate de teoria în care se neglijează viteza de deformare (expusă în capitolul precedent). Pentru uşurinţa calculelor, în cea de a treia ecuaţie (2.21) funcţiunea $g(\sigma,\varepsilon)$ a fost luată liniară, de forma (2.7), iar pentru relaţia statică $\sigma = f(\varepsilon)$ s-a luat relaţia satisfăcută de un anumit tip de aluminiu, cînd deformaţiile depăşesc 0,001:

$$f(\varepsilon) = 20\,000 - \frac{10}{\varepsilon}$$

în care $E = 7{,}031 \cdot 10^5$ kg/cm², $\sigma_s = 7{,}031 \cdot 10^2$ kg/cm²; $\rho = 2{,}72 \cdot 10^{-6}$ kg.s²/cm⁴. Curba statică $\sigma \sim \varepsilon$ este curba punctată din fig. 19. Celelalte curbe au fost reprezentate pentru diferite viteze de deformare. Pentru constanta k, *Malvern* adoptă valoarea $k = 10^6$ s^{-1}. Această valoare a lui k dă o creştere a tensiunii dinamice faţă de cea statică, de aproximativ 10% pentru viteza de deformare de 200 s^{-1}. Pornind de la constatarea că curbele $\sigma \sim \varepsilon$ pentru diferite viteze de deformare, se obţin din cea statică prin translaţie de-a lungul dreptei $\sigma = E\,\varepsilon$ (fig. 19), *C. Riparbelli* [190] trage concluzia că dintr-o relaţie între tensiune şi viteza de deformare nu se poate afirma nimic referitor la tensiune, dacă se măsoară numai distribuţia deformaţiilor plastice.

Pentru a arăta că distribuţia de deformaţii într-o bară semi infinită, cînd ţinem seama de influenţa vitezei de deformare, este diferită de cea în care nu ţinem seama de ea, *Malvern* examinează două cazuri: cazul în care viteza de lovire la capătul barei creşte instantaneu pînă la o anumită valoare constantă $v_0 = 21{,}34$ m/s şi cazul în care viteza la capătul barei creşte continuu după legea exponenţială $v = -21{,}34\,[1 - e^{-\alpha t}]$ către aceeaşi viteză maximă v_0.

Scanned with OKEN Scanner

Compararea celor două soluții în planul (x; t) pentru primul caz, al vitezei ce crește instantaneu, este reprodusă în fig. 20. Un grafic similar a fost dat de *Malvern* și pentru cazul al doilea, al vitezei crescînd exponențial. Pe figură sînt reprezentate, în planul (x, t) linii de aceeași deformație. Liniile pline corespund soluției lui *Malvern*, iar cele punctate soluției ce neglijează viteza de defor-

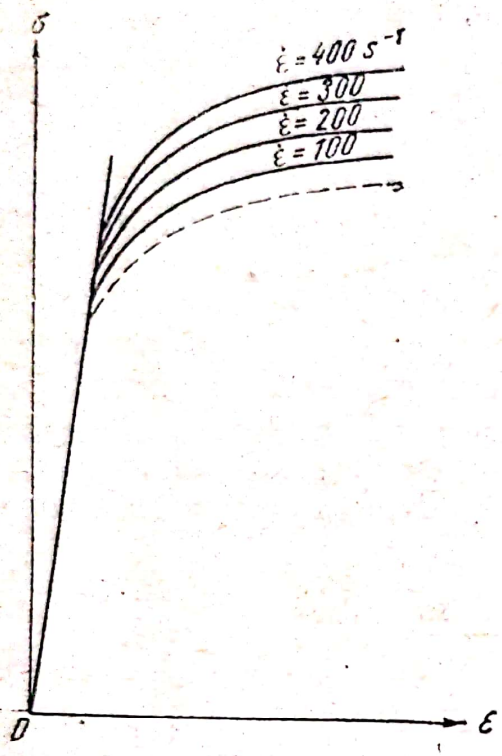

Fig. 19

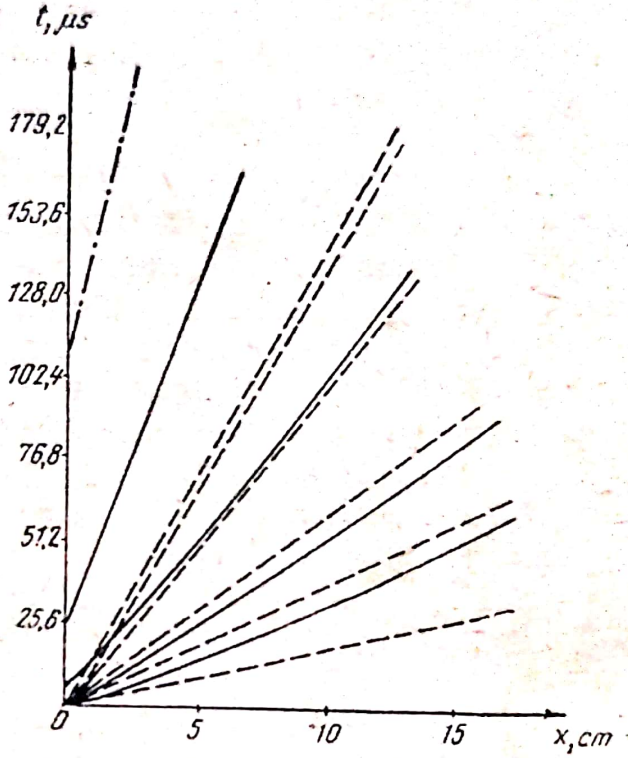

Fig. 20

mare. Din fig. 20 rezultă că datorită influenței vitezei de deformare, deformațiile mici se propagă mai repede la început. Apoi la o oarecare distanță de origine, viteza de deformare devenind mai mică, ambele linii, corespunzînd celor două soluții, sînt aproximativ paralele. Pentru deformații mari, situația se inversează: viteza de deformare produce o întîrziere a propagării. Pentru valoarea considerată a vitezei v_0, deformația maximă este $\varepsilon = 0{,}0074$.

În soluția care neglijează viteza de deformare (Cap. I § 2) odată atinsă deformația maximă, în bară există o regiune în care deformația se menține constantă și egală cu această deformație maximă. În soluția lui *Malvern* o asemenea regiune de deformație constantă, nu există.

R. J. Rubin [192] a reluat ecuațiile lui *Malvern*. El arată, contrar rezultatelor lui *Malvern*, că spre capătul barei semiinfinite, soluția, ținînd seama de viteza de deformare, tinde asimptotic, cînd

Scanned with OKEN Scanner

timpul tinde la infinit, către cea care nu ține seama de ea. *Rubin* studiază și el influența vitezei de deformare, dar în cazul consolidării liniare și dînd soluțiile ecuațiilor de mișcare cu ajutorul transformatei lui Laplace.

Atît *Malvern* cît și *Rubin* studiază unda de descărcare, presupunînd de la bun început că undele sînt unde de șoc. Ei studiază problema amortizării undelor, datorită efectului vitezei de deformare.

B. E. K. Aller și *C. W. Curtis* [7] au căutat să verifice experimental teoria lui *Malvern*. Experiențele lor se refereau la propagarea unor impulsuri de scurtă durată de-a lungul unor bare de plumb. Experiențele lor confirmă teoria lui *Malvern* și infirmă teoria ce nu ține seama de influența vitezei de deformare. Pentru interpretarea experiențelor, autorii utilizează relația liniară (2.7′). Ei presupun că unele devieri ale rezultatelor experimentale față de cele teoretice s-ar datori faptului că în realitate funcția $g\ (\sigma, \varepsilon)$ nu este liniară.

Considerații privind influența vitezei de deformare asupra proprietăților mecanice ale materialelor au fost făcute și de *F. X. Eder* [251]. El dă și unele rezultate experimentale obținute cu ajutorul unor epruvete subțiri de cupru încărcate longitudinal, celălalt capăt al barei fiind fix. Se ține seamă de consolidare și de lungimea barelor.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

UNDE DE ŞOC ÎN SOLIDE

§ 1. POSIBILITATEA APARIŢIEI UNDELOR DE ŞOC ÎN SOLIDE

Undele despre care a fost vorba în capitolele precedente, erau unde plastice obişnuite. Discontinuităţile propagabile erau discontinuităţi ale derivatei de ordinul întîi ale tensiunii şi ale derivatelor de ordinul al doilea ale deplasării. De cîţiva ani s-a pus problema dacă în solide pot exista şi unde de şoc, similare cu cele care se produc în gaze. Se pune deci problema dacă pot exista în solide discontinuităţi chiar ale tensiunii şi ale vitezei, care să fie propagabile. Astăzi se consideră că există două cazuri în care undele de şoc pot apărea în solide (*Kolsky* [105]). Aceste cazuri le vom expune în paragrafele următoare.

Vrem să atragem atenţia de la început că majoritatea autorilor care s-au ocupat cu studiul propagării undelor de şoc în solide, au considerat că ele apar datorită unui şoc (lovire, explozie) foarte puternic. Ei consideră deci că undele de şoc sînt limita către care tinde un fascicul de unde Riemann, cînd încărcarea monotonă la capătul barei tinde către o încărcare instantanee. Ele au fost introduse în cazurile în care încărcarea la capătul barei este destul de bruscă pentru a putea fi considerată instantanee, deoarece calculele sînt mai simple dacă aproximăm undele plastice obişnuite prin unde de şoc. *R. Courant* şi *K. O. Friedrichs* [38] sînt chiar de părere că aceste unde nu ar trebui să fie numite unde de « şoc », întrucît este vorba de o mişcare « sonică », unda respectivă fiind de fapt un fascicul de unde Riemann ale căror fronturi coincid. Deci majoritatea autorilor consideră că tabloul propagării deformaţiilor prin unde de şoc în cazul încărcărilor foarte rapide, este doar o aproximare a tabloului propagării prin unde plastice obişnuite.

Scanned with OKEN Scanner

Să vedem în ce cazuri este eventual posibilă apariţia undelor de şoc în solide. În cele două cazuri pe care le vom expune mai jos, este vorba de problema apariţiei undelor de şoc, cînd încărcarea la capătul barei nu este totdeauna considerată instantanee.

§ 2. CONCAVITATEA CURBEI $\sigma \sim \varepsilon$ DIRIJATĂ SPRE AXA TENSIUNILOR CRESCĂTOARE

a) **Consideraţii generale.** Vom observa în primul rînd că în solide viteza de propagare a undelor este mult mai mare decît vitezele particulelor. Deci acestea din urmă, de cele mai multe ori se pot neglija în raport cu viteza de propagare a undelor plastice sau chiar elastice. Pe de altă parte, pătratul vitezei de propagare c^2 a undelor plastice este proporţional cu $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$, adică cu panta la curba $\sigma \sim \varepsilon$. De obicei modulul de elasticitate E al materialului este mult mai mare decît modulul, variabil sau constant de consolidare. Deci, de obicei, pentru aceste materiale, undele elastice se propagă mai repede decît cele plastice. Dacă modulul de consolidare $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ este monoton descrescător, undele plastice, pe măsura creşterii deformaţiei, se vor propaga cu viteză din ce în ce mai mică. În acest caz, dacă tensiunea la capătul barei depăşeşte limita de elasticitate, într-o secţiune oarecare a barei, vom avea situaţia următoare: după timpul $t = \frac{x}{c_0}$ în această secţiune ajunge frontul undelor elastice. Din acel moment, dacă considerăm la capătul barei numai încărcări monoton crescătoare, deformaţia în această secţiune va creşte continuu, pînă la valoarea ei maximă. Pentru aceste materiale deci, undele ce iau naştere la capătul barei, se împrăştie în bară, în sensul că distanţa dintre fronturile lor creşte pe măsură ce undele se propagă.

Există totuşi materiale, cum sînt cauciucul, unii polimeri înalţi în perioada de cristalizare, şi în anumite condiţii chiar anumite metale (oţel cu conţinut de crom şi nichel, aramă etc.) pentru care concavitatea curbei $\sigma \sim \varepsilon$ este dirijată spre axa tensiunilor crescătoare. În acest caz, marile deformaţii plastice se propagă mai repede decît micile deformaţii plastice. Cîteodată chiar marile deformaţii plastice se propagă mai repede decît deformaţiile elastice. În asemenea cazuri, chiar pentru încărcări monotone la capătul barei, în timpul procesului de deformare pot să apară unde de şoc în interiorul barei, căci undele pe care deformaţiile sînt mari, pot să ajungă şi să întreacă undele pe care deformaţiile sînt mai mici.

Scanned with OKEN Scanner

b) **Exemplu.** 1. *E. H. Lee* și *S. J. Tupper* [121] au studiat problema propagării undelor plastice de șoc în bare finite de oțel cu conținut de crom și nichel, cînd aceste bare lovesc o placă rigidă. Diagrama $\sigma \sim \varepsilon$ pentru un asemenea oțel se bucură de proprietatea expusă mai sus. Pe de altă parte, autorii citați, atrag atenția că pentru un asemenea material, diagrama dinamică $\sigma \sim \varepsilon$ diferă puțin de cea statică și deci putem neglija influența vitezei de deformare. Pentru alte materiale însă, această presupunere nu se poate face. Astfel de exemplu, în urma unor încercări efectuate pe epruvete de oțel cu puțin crom, lovite longitudinal, *D. B. Harris* și *M. P. White* [73] atrag atenția că diagrama dinamică $\sigma \sim \varepsilon$ diferă mult de cea statică. Limita de elasticitate crește mult la încercări dinamice.

Atît autorii de mai sus, cît și ceilalți autori care s-au ocupat de problema propagării undelor de șoc în solide, au considerat că datorită condițiilor la limită (lovire bruscă a capătului barei) undele de șoc apar chiar de la suprafața de lovire. Mai jos vom arăta că, chiar pentru încărcări monotone la capătul barei presupusă semiinfinită, undele de șoc pot apărea în bară, începînd de la o anumită secțiune. Această secțiune se află la o distanță bine determinată de capătul barei. Se va presupune deci că tensiunea sau deformația la capătul barei crește monoton în timp după o lege dată [48].

Diagrama statică $\sigma \sim \varepsilon$ pentru oțel cu conținut de crom și nichel se poate aproxima prin relațiile

$$\begin{aligned} &\sigma = E\varepsilon \qquad \text{pentru } \varepsilon \leqslant \varepsilon_s \\ &\sigma = \sigma_s - \frac{a[\varepsilon - \varepsilon_s]}{\varepsilon - \varepsilon_s - b} \text{ pentru } \varepsilon \geqslant \varepsilon_s . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ea este reprezentată în fig. 21. Pentru exemplificare și trasarea efectivă a graficului din fig. 21 am luat $a = 13\,066$ kg/cm², $b = 0{,}8886$, $\sigma_s = 18\,100$ kg/cm², $\varepsilon_s = 0{,}014$ și $E = 1\,282\,857$ kg/cm². În (3.1) σ este tensiunea relativă, adică efortul raportat la secțiunea inițială.

Pentru un material care satisface (3.1) vitezele de propagare ale undelor longitudinale sînt

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \qquad \text{pentru } \varepsilon \leqslant \varepsilon_s \\ c(\varepsilon) &= \sqrt{\frac{ab}{\rho_0}} \frac{-1}{\varepsilon - \varepsilon_s - b} \text{ pentru } \varepsilon \geqslant \varepsilon_s . \end{aligned} \tag{3.2}$$

2. Să considerăm acum că deformația la capătul barei crește monoton în timp, după legea

$$\varepsilon = \lambda\tau . \tag{3.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care τ este parametrul timp, iar λ un coeficient constant de proporționalitate. Pentru $\varepsilon > \varepsilon_s$, relația (3.3) se mai poate pune sub forma

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \lambda [\tau - \tau_s]$$

unde $\varepsilon_s = \lambda \tau_s$.

Cu cît încărcarea dinamică de la capătul barei este mai rapidă, cu atît valoarea lui λ este mai mare. Vom presupune că deformația de la capătul barei, după ce a atins valoarea ei maximă, rămîne con-

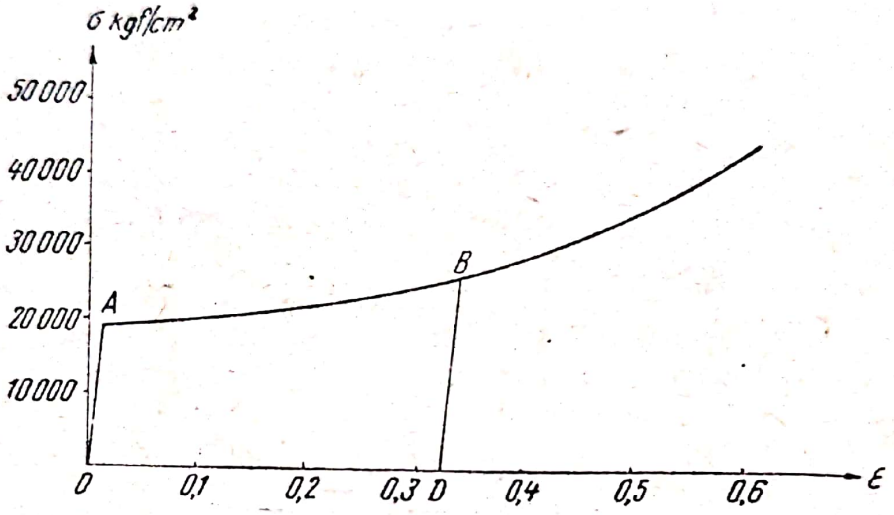

Fig 21

stantă într-un anumit interval de timp. Pentru aceste condiții la limită, să cercetăm procesul de propagare al undelor într-o bară suficient de lungă (semiinfinită) pentru a nu considera influența undelor reflectate. Vom presupune că datorită condițiilor la limită luate, de la capătul barei se pot propaga numai unde de ordinul al doilea. Vom considera deci numai discontinuități ale derivatelor prime ale tensiunii, vitezei și deformației. Vom cerceta dacă în aceste condiții este posibilă apariția undelor de șoc, undeva în bară. Aceste unde deci ar fi datorite numai concavității curbei $\sigma \sim \varepsilon$ care este dirijată spre σ pozitiv (fig. 21).

Caracteristicele și relațiile diferențiale satisfăcute pe aceste caracteristice sînt

$$dx = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}\, dt, \quad dv = c(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{3.5}$$

După cum am arătat în Cap. I, de-a lungul acestor caracteristice $\varepsilon = \text{const}$. Cea de a doua relație (3.5) ne furnizează viteza particulelor.

Scanned with OKEN Scanner

Prima relaţie (3.5) pentru cazul particular al relaţiilor (3.1), devine după integrare

$$x = \sqrt{\frac{\overline{E}}{\rho_0}}\,(t-\tau) \qquad \text{pentru } \varepsilon \leqslant \varepsilon_s \tag{3.6}$$

$$x = -\sqrt{\frac{\overline{ab}}{\rho_0}}\,\frac{t-\tau}{\varepsilon-\varepsilon_s-b} \qquad \text{pentru } \varepsilon \geqslant \varepsilon_s. \tag{3.7}$$

Întrucît de-a lungul caracteristicelor (3.6) şi (3.7) deformaţia este constantă, aceste caracteristice în planul (x, t) reprezintă nişte drepte. În ecuaţiile (3.6) şi (3.7) ale acestor drepte, τ este un parametru. El reprezintă timpul la care unda respectivă a pornit de la capătul barei. În planul (x, t), τ reprezintă ordonata punctului de intersecţie dintre frontul undei respective şi axa Ot. Dînd parametrului τ diferite valori vom obţine diferite unde în planul (x, t). Parametrul τ care intervine în (3.6) şi (3.7) este acelaşi cu cel care intervine în (3.3) şi (3.4).

În (3.6) şi (3.7) semnele au fost alese astfel încît ele să fie caracteristice din domeniul încărcării şi pentru unde directe.

Pentru o încărcare monotonă la capătul barei, dată de (3.4), caracteristicele (3.7) se scriu

$$x = -\sqrt{\frac{\overline{ab}}{\rho_0}}\,\frac{t-\tau}{\lambda[\tau-\tau_s]-b}\,. \tag{3.8}$$

Deoarece pentru materialul considerat, $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ este crescător cînd ε creşte şi deci este crescător şi $c(\varepsilon)$, coeficientul unghiular al dreptelor (3.8) este descrescător. Deci pentru diferite valori ale parametrului τ, caracteristicele (3.8) vor fi reprezentate în planul (x,t) de un fascicul convergent de drepte. Este natural deci să ne punem problema găsirii locului geometric al intersecţiei dreptelor (3.8) cînd τ variază. Acesta se obţine uşor din (3.8) şi din relaţia ce se obţine din (3.8) prin derivare în raport cu τ. Obţinem astfel

$$x_Q = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\overline{ab}}{\rho_0}}\,, \quad t_Q = \tau_s' + \frac{b}{\lambda}. \tag{3.9}$$

Pentru valori date ale lui a, b şi λ, (3.9) reprezintă un punct fix. Acest punct fix a fost reprezentat în fig. 22, prin punctul Q, coordonatele lui fiind notate cu x_Q şi t_Q. Deci toate caracteristicele (3.8), pentru condiţiile la limită (3.3) şi relaţia $\sigma \sim \varepsilon$ dată de (3.1), trec printr-un punct fix. Pentru o aceeaşi încărcare dată de (3.3), însă

Scanned with OKEN Scanner

pentru valori diferite ale lui λ, obținem diferite puncte fixe. Locul geometric al acestor puncte fixe, cînd λ variază este

$$\sqrt{\frac{\overline{ab}}{\rho_0}}\, t_Q = [\varepsilon_s + b]\, x_Q. \qquad (3.10)$$

Ecuația (3.10) a fost reprezentată în fig. 22 prin dreapta punctată ce trece prin origine. Relația dintre t_Q și λ este dată de a doua relație (3.9), care se pune sub forma $t_Q \lambda = \varepsilon_s + b$ și reprezintă o hiperbolă echilateră într-un plan (t, λ).

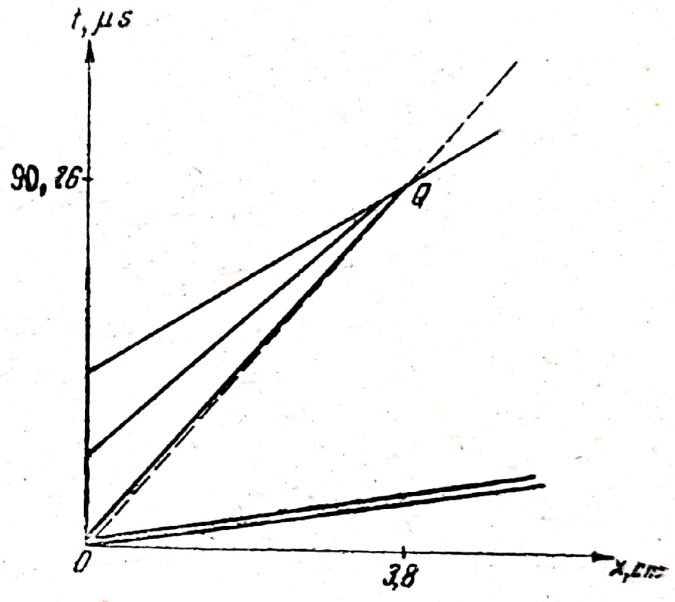

Fig. 22

Să presupunem că variația deformației la capătul barei este cunoscută și dată de formula (3.3). În (3.3) este dată deci valoarea lui λ. În intervalul de timp $0 < \tau \leqslant \tau_s$, de la capătul barei se vor propaga unde elastice, ale căror fronturi sînt reprezentate în fig. 22 prin drepte paralele. Pentru $\tau > \tau_s$, adică pentru $\varepsilon > \varepsilon_s$, de la capătul barei se vor propaga unde plastice. Cu cît valoarea parametrului τ este mai mare, cu atît viteza undei plastice respective este mai mare. Să presupunem că deformația după ce a crescut monoton, conform relației (3.3), a atins valoarea maximă $\varepsilon_{max} = \lambda \tau_{max}$, iar apoi într-un anumit interval de timp a rămas constantă. Toate fronturile undelor plastice care iau naștere la capătul barei în intervalul de timp $\tau_s \leqslant \tau \leqslant \tau_{max}$, trec prin punctul fix dat de (3.9). În secțiunea x_Q, unda plastică pe care deformația este maximă, ajunge din urmă și apoi întrece celelalte unde plastice. Deci în porțiunea de bară $0 < x < x_Q$ deformația în fiecare secțiune a barei va crește monoton, datorită fasciculului de unde plastice ce trece prin punctul Q. Deci pînă la secțiunea x_Q, în bară se vor propaga discontinuități ale derivatelor tensiunilor, deformațiilor și vitezelor.

În secțiunile din bară, corespunzătoare lui $x \geqslant x_Q$, deformația nu va mai crește monoton, deși la capătul barei ea crește monoton. Să considerăm una din aceste secțiuni, de coordonată lagrangeană

$x_1 > x_Q$. După timpul $t_1 = \frac{x_1}{c_0}$ în această secțiune ajunge prima undă elastică (3.6) corespunzătoare valorii $\tau = 0$ a parametrului τ. În intervalul de timp $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \tau_s$ în această secțiune deformația va crește de la zero pînă la ε_s. Apoi, în intervalul de timp $t_1 + \tau_s \leqslant t < \left\{\tau_{max} - \sqrt{\frac{\rho_0}{ab}}\,[\varepsilon_{max} - \varepsilon_s - b]\,x_1\right\}$ deformația rămîne constantă și egală cu ε_s. La timpul $t = \tau_{max} - \sqrt{\frac{\rho_0}{ab}}\,[\varepsilon_{max} - \varepsilon_s - b]\,x_1$ deformația în secțiunea x_1 va suferi un salt de la ε_s pînă la ε_{max}. Deci în porțiunea de bară $x \geqslant x_Q$ deformațiile plastice apar printr-un salt. Unda plastică (3.8) corespunzătoare valorii $\tau = \tau_{max}$ a parametrului τ, în porțiunea de bară $0 < x < x_Q$ trebuie considerată o undă de al doilea ordin, iar în porțiunea de bară $x \geqslant x_Q$ ea trebuie considerată undă de șoc.

Pentru $t > \left\{\tau_{max} - \sqrt{\frac{\rho_0}{ab}}\,[\varepsilon_{max} - \varepsilon_s - b]\,x_1\right\}$, după cum am presupus, deformația rămîne, într-un anumit interval de timp, constantă și egală cu ε_{max}. În continuare se poate studia, utilizînd metode cunoscute, problema descărcării, a reflectării undelor etc.

Referindu-ne la viteza de propagare a frontului undelor plastice, vom observa că în porțiunea de bară $0 < x < x_Q$, ea este $c(\varepsilon_s) = \sqrt{\frac{a}{\rho_0 b}}$. În porțiunea de bară $x \geqslant x_Q$, viteza frontului undelor plastice (adică, de data aceasta, viteza undei de șoc) este $c(\varepsilon_{max}) = \sqrt{\frac{ab}{\rho_0}}\,\frac{-1}{\varepsilon_{max} - \varepsilon_s - b}$. Deci în secțiunea $x = x_Q$ viteza de propagare a frontului undelor plastice suferă o discontinuitate. Această secțiune se poate determina dacă este dată relația $\sigma \sim \varepsilon$ și legea de variație a deformației la capătul barei. Punctul Q în planul (x, t), joacă rolul unui punct fix, în sensul că pentru o aceeași încărcare (3.3), dar pentru diferite deformații maxime, undele de șoc încep să se propage mereu de la o aceeași secțiune x_Q și începînd de la același timp t_Q.

Toate considerațiile de mai sus, au fost făcute presupunînd că valoarea lui λ este dată. Pentru valori foarte mici ale lui λ, abscisa x_Q a punctului Q este foarte mare. În acest caz, unda de șoc, în mod practic, nu va mai apărea în epruvete finite de oțel, oricît de lungi, ar fi ele. Dacă însă valoarea lui λ este foarte mare, abscisa x_Q va fi mai mică și unda de șoc poate să apară în epruvete destul de scurte. În acest ultim caz, putem trata problema fie în modul

Scanned with OKEN Scanner

expus mai sus, adică luînd în considerare un fascicul de unde plastice de al doilea ordin în porțiunea de bară $0 < x < x_Q$, fie în următoarele două moduri:

a) Din cauza micimii lui x_Q putem uneori să-l neglijăm și să considerăm că unda de șoc, pe care deformația este ε_{max}, pornește chiar de la capătul barei. Se presupune deci că punctul Q este situat la capătul barei (pe axa Ot în fig. 22). Această aproximație se folosește în cazul așa ziselor încărcări instantanee.

b) Dacă porțiunea de bară $0 < x < x_Q$ nu se poate neglija, putem cîteodată să aproximăm fasciculul de unde plastice de al doilea ordin, printr-o singură undă de șoc. În acest caz, în porțiunea de bară $0 < x < x_Q$ se va propaga o undă de șoc plastică, iar în porțiunea $x \geqslant x_Q$ altă undă de șoc plastică. Cele două unde s-ar propaga atunci cu viteze diferite.

Pentru exemplificare am luat $\lambda=1\ s^{-1}$ și $\lambda = 10^4\ s^{-1}$. Pentru $\lambda = 1\ s^{-1}$, obținem ușor $\tau_s = 14\cdot10^{-3}$ s; $t_Q = 0{,}9026$ s și $x_Q = 380{,}65$ m. Pentru $\lambda= 10^4\ s^{-1}$, obținem $\tau_s =14\cdot10^{-7}$ s; $t_Q =0{,}09026$ ms. și $x_Q = 3{,}8$ cm. Viteza de propagare a undelor elastice este $c_0 = 4016{,}8$ m/s. Graficul din fig. 22 a fost făcut în presupunerea că $\lambda = 10^4\ s^{-1}$.

3. Să considerăm acum cazul în care deformația la capătul barei crește după o lege polinomială. Pentru simplificare vom lua un polinom omogen și de gradul al doilea în timp. Cazul polinoamelor de grad mai mare, se poate trata similar, calculele fiind însă mai complicate. Deformația la capătul barei variază deci după legea

$$\varepsilon = \lambda' [\beta'\tau^2 + \alpha'\tau] \tag{3.11}$$

unde λ', α', β' sînt constante pe care le vom presupune pozitive. Cîteodată unele dintre constante pot fi însă negative sau nule. Dacă $\beta' = 0$, obținem cazul considerat în subpunctul precedent. Vom presupune deci în cele ce urmează că $\beta' \neq 0$ și deci relația (3.11) se mai poate scrie

$$\varepsilon = \lambda [\tau^2 + \alpha\tau] \tag{3.12}$$

în care $\lambda = \lambda'\beta'$ și $\alpha = \frac{\alpha'}{\beta'}$. Punînd în evidență deformația corespunzătoare limitei de elasticitate, formula (3.12) se mai poate scrie

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \lambda [\tau^2 + \alpha\tau - t^*] \tag{3.13}$$

în care

$$\varepsilon_s = \lambda [\tau_s^2 + 2\tau_s] = \lambda t^*. \tag{3.14}$$

Pentru o încărcare de forma (3.13), caracteristicele (3.7) din domeniul de încărcare devin

$$x = -\sqrt{\frac{ab}{\rho_0}}\,\frac{t-\tau}{\lambda\,[\tau^2+\alpha\tau-t^*]-b}. \tag{3.15}$$

Ca şi în cazul precedent, ne punem problema găsirii locului geometric al intersecţiei familiei de drepte (3.15), cînd τ variază. Să derivăm deci pe (3.15) în raport cu τ; obţinem

$$\tau = t \pm \sqrt{t^2+\alpha t-t^*-\frac{b}{\lambda}}. \tag{3.16}$$

Pentru a găsi locul geometric căutat, trebuie să eliminăm pe τ între (3.16) şi (3.15). Această eliminare conduce la o relaţie destul de complicată între x şi t. Locul geometric se poate totuşi calcula pentru diferite valori particulare ale lui λ şi α. Noi vom considera mereu $\alpha = 1$.

Pentru $\lambda = 1$, relaţia (3.12) devine $\varepsilon = \tau^2 + \tau$. Locul geometric căutat, care este înfăşurătoarea dreptelor (3.15) a fost reprezentată în fig. 23. Ramura punctată a curbei nu are interpretare fizică şi nu ne vom ocupa de ea. În punctul M curba are un minim. Coordonatele lui M sînt $x_M = 177{,}82$ m şi $t_M = 0{,}57$ s. Fronturile undelor plastice sînt tangente înfăşurătoarei MN. Punctul N este punctul de tangenţă dintre frontul primei unde plastice corespunzătoare valorii $\tau = \tau_s$, a parametrului τ şi înfăşurătoare. Coordonatele lui sînt $x_N = 370{,}36$ m şi $t_N = 0{,}879$ s.

Să presupunem ca şi mai înainte că deformaţia la capătul barei creşte monoton în timp după legea (3.12), atinge valoarea maximă $\varepsilon_{max} = \tau_{max}^2 + \tau_{max}$, apoi într-un anumit interval de timp rămîne constantă. Fie P punctul de tangenţă dintre înfăşurătoarea MN şi frontul undei plastice pe care deformaţia este ε_{max}. În porţiunea de bară $0 < x \leqslant x_P$ deformaţia în fiecare secţiune creşte monoton pînă la ε_{max}. În porţiunea de bară $x_P < x < x_R$ unda plastică, al cărui front se reprezintă prin segmentul PR devine undă de şoc, căci saltul deformaţiei pe segmentul PR creşte de la zero în punctul P pînă la $\varepsilon_{max} - \varepsilon_s$ în punctul R. În restul barei, de-a lungul lui RS (cînd $x \geqslant x_R$) saltul deformaţiei este constant şi egal cu $\varepsilon_{max} - \varepsilon_s$.

Referindu-ne la viteza de propagare a frontului undelor plastice, putem să facem aceeaşi observaţie ca şi în cazul de la punctul 2. În porţiunea de bară $0 < x < x_R$ această viteză este egală cu

Scanned with OKEN Scanner

$c(\varepsilon_s) = \sqrt{\frac{a}{\rho_0 b}}$. În punctul R ea suferă o discontinuitate, astfel încît în restul barei ($x \geqslant x_R$) ea va fi

$$c(\varepsilon_{max}) = -\sqrt{\frac{ab}{\rho_0}} \frac{1}{\varepsilon_{max} - \varepsilon_s - b}.$$

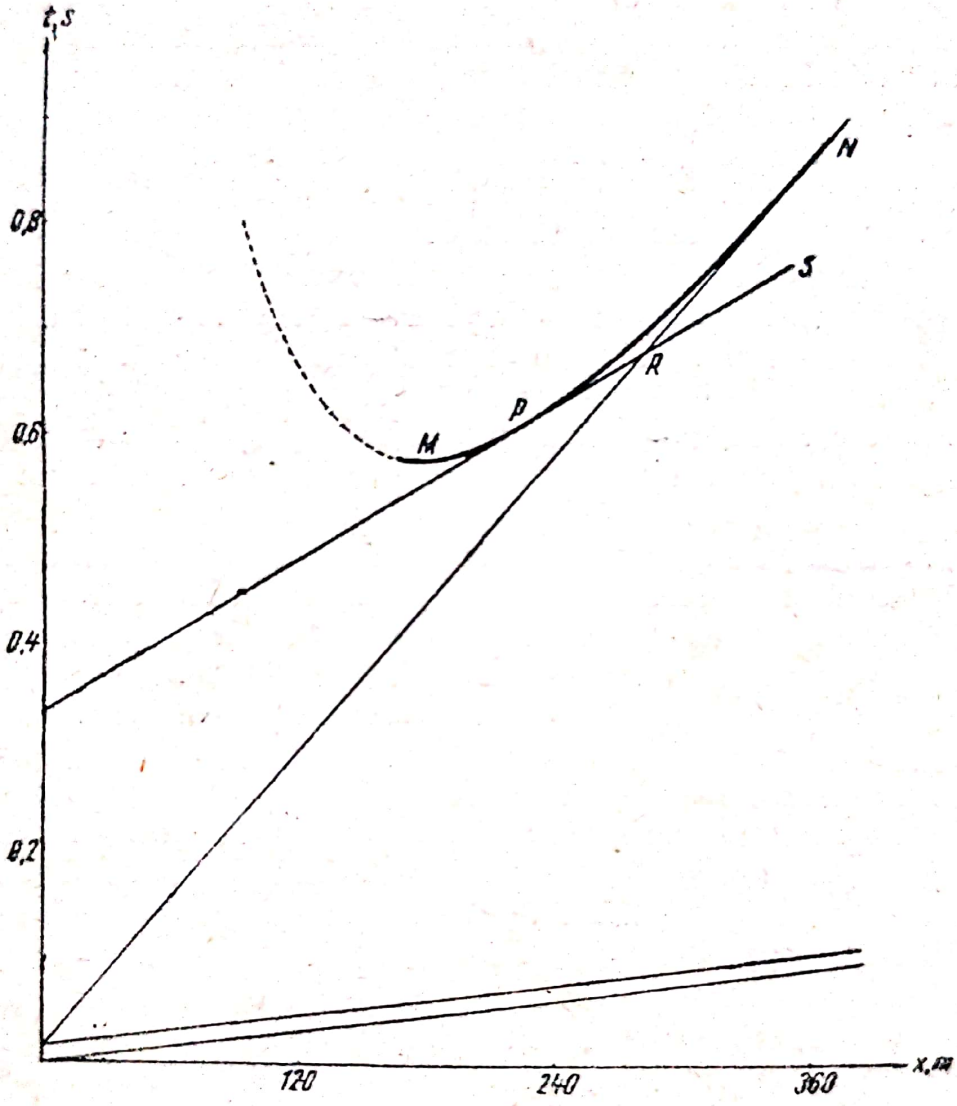

Fig. 23

Să luăm pentru λ valoarea $\lambda^* = 10^4\ s^{-1}$. În acest caz obținem $x_{M^*} = 3{,}8$ cm, $t_{M^*} = 0{,}09$ ms., $x_{N^*} = 3{,}808$ cm, $t_{N^*} = 0{,}09025$ ms.

Din cele de mai sus rezultă că pentru valori mari ale lui λ diferențele $x_{N^*} - x_{M^*}$ și $t_{N^*} - t_{M^*}$ scad foarte mult devenind cîteodată chiar neglijabile. În acest caz deci, curba M^*N^* tinde să se reducă la un punct, care este chiar punctul fix de la cazul precedent. Aceasta se datorește faptului că pentru valori foarte mari ale lui λ,

valorile lui τ sînt foarte mici, astfel încît τ^2 poate fi neglijat în raport cu τ şi relaţia (3.12) se reduce la relaţia (3.3). Această concluzie este evident valabilă şi dacă în locul polinomului de gradul al doilea în τ din (3.12) am fi avut un polinom de grad superior. Vom avea totdeauna grijă să ţinem seama şi de ordinul de mărime al coeficienţilor α, β etc. Deci pentru încărcări monotone rapide la capătul barei, putem aproxima de cele mai multe ori, legea de variaţie a deformaţiei la capătul barei printr-o relaţie liniară de forma (3.3).

4. *Concluzii.* Din exemplul de mai sus rezultă mai multe concluzii.

În barele de oţel cu conţinut de crom şi nichel, datorită faptului că concavitatea curbei $\sigma \sim \varepsilon$ este dirijată spre axa tensiunilor pozitive, chiar pentru o încărcare monotonă la capătul ei, este posibilă apariţia undelor de şoc undeva în bară.

În exemplul considerat fronturile undelor de şoc coincid cu caracteristicele. Pentru alte relaţii $\sigma \sim \varepsilon$ şi eventual pentru alte încărcări la capătul barei, aceste fronturi ar putea să nu coincidă cu caracteristicele, ci să fie înfăşurătoare de caracteristice.

Pentru o curbă $\sigma \sim \varepsilon$ dată şi pentru o lege dată de variaţie a deformaţiei la capătul barei, se pot calcula precis porţiunile din bară străbătute de unde de al doilea ordin sau de unde de şoc.

Dacă încărcarea monotonă la capătul barei este mai rapidă (dacă λ este foarte mare), porţiunea de bară străbătută de unde de al doilea ordin este foarte mică şi de multe ori se poate neglija. În acest caz putem presupune că unda de şoc plastică porneşte de la capătul barei şi pe frontul ei avem un salt al deformaţiei de la ε_s la ε_{max}.

Viteza de propagare a frontului undelor plastice va suferi o discontinuitate într-o anumită secţiune din bară. Această secţiune, precum şi valorile vitezelor de propagare dintr-o parte şi din alta a secţiunii se pot determina dacă se dau relaţia $\sigma \sim \varepsilon$ şi legea de variaţie a lui ε la capătul barei. Cele două valori ale vitezelor sînt constante.

Pentru materiale avînd concavitatea curbei $\sigma \sim \varepsilon$ dirijată spre axa tensiunilor crescătoare, caracteristicele din domeniul încărcării admit o înfăşurătoare. Dacă deformaţia la capătul barei creşte liniar în timp, această înfăşurătoare degenerează într-un punct fix. Dacă variaţia deformaţiei este dată de un polinom omogen şi de gradul al doilea în t, înfăşurătoarea este propriu zis o curbă.

Calculele de mai sus sînt valabile atît pentru întindere cît şi pentru compresiune. Va trebui însă să ţinem seama că tensiunea şi deplasările îşi schimbă semnul.

Exemplul de mai sus a fost dat ca să se pună în evidenţă posibilitatea apariţiei undelor de şoc în oţel, pentru încărcări monotone,

Scanned with OKEN Scanner

precum şi de a descrie mecanismul propagării acestor unde. Pentru alte relaţii $\sigma \sim \varepsilon$ şi pentru altă lege de variaţie a deformaţiei la capătul barei, calculele pot fi făcute în mod similar.

Rezultatele expuse mai sus ar putea să nu fie verificate în întregime experimental, pentru că în calculele de mai sus nu s-a ţinut seamă de mai mulţi factori, şi în primul rînd nu s-a ţinut seama de inerţia datorită mişcării transversale. *E. H. Lee* este de părere că datorită acestei inerţii este posibil ca undele de şoc să nu apară în realitate şi calculele de mai sus ar putea fi doar aproximative, iar analizarea mai amănunţită a fenomenului de formare a undei de şoc ar putea duce la rezultate în neconcordanţă cu experienţa.

§ 3. CAZUL PRESIUNILOR HIDROSTATICE FOARTE MARI

Undele de şoc pot să apară şi într-un alt caz (*Kolsky* [105]) şi anume atunci cînd în corp se propagă unde pe care valorile tensiunilor sînt foarte mari şi deci presiunea hidrostatică este foarte mare. După cum se ştie, undele elastice de întindere se propagă cu viteza $\left[\frac{K+\frac{4}{3}\mu}{\rho}\right]^{1/2}$ unde K este modulul compresibilităţii de volum. $\left(K=\lambda+\frac{2}{3}\mu,\ \lambda \text{ şi } \mu \text{ fiind coeficienţii lui Lamé}\right)$. *Bridgman* [24] a arătat însă că pentru presiuni foarte mari, acest modul creşte şi deci undele pe care deformaţiile (şi deci şi tensiunile) sînt foarte mari, se pot propaga mai repede decît cele pe care deformaţiile sînt mai mici. De remarcat că modulul de forfecare nu joacă nici un rol, pentru că pentru mari deformaţii, materialul se comportă ca un fluid.

Bridgman a arătat [24] că pentru presiuni mergînd pînă la 30 000 kg/cm^2 şi uneori chiar pînă la 100 000 kg/cm^2, relaţia dintre volumul V şi presiunea hidrostatică p pentru solide, este de forma

$$-\frac{V-V_0}{V_0} = a\cdot 10^{-7}\, p - b\cdot 10^{-12}\, p^2 \qquad (3.17)$$

în care V_0 este volumul iniţial, a şi b sînt constante, iar p se măsoară în kg/cm^2. Pentru fier de exemplu, la 30° avem $a = 5{,}87$ şi $b = 2{,}1$, iar la 75°: $a = 5{,}93$ şi $b = 2{,}1$. Pentru aluminiu la 30°: $a = 13{,}43$ şi $b = 5{,}0$; iar la 75°: $a = 13{,}74$ şi $b = 5{,}1$. Cîteodată, pentru foarte puţine materiale, aceste constante îşi pot schimba şi semnul.

O formulă similară cu cea propusă de *Bridgman*, şi anume de forma

$$p = \frac{K}{n}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

în care K este modulul de compresibilitate a mediului şi n o constantă, a fost propusă de *F. A. Bahşian* [152]. Această relaţie conţine drept caz particular, relaţia lui *Bridgman*.

Compresibilitatea $\frac{1}{K}$ este definită de $\frac{1}{K} = -\frac{1}{V_0}\frac{\partial V}{\partial p}$ şi pentrucă avem $\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial \Delta V}{\partial p}$ (în care $\Delta V = V - V_0$) rezultă

$$\frac{1}{K} = a \cdot 10^{-7} - 2\,b \cdot 10^{-12}\,p \quad \text{şi} \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{K}\right)}{\partial p} = -2\,b \cdot 10^{-12}.$$

Deci variaţia compresibilităţii în raport cu presiunea este negativă (numai pentru puţine materiale b îşi schimbă semnul şi deci ea poate fi şi pozitivă). Pentru presiuni mici ea se poate neglija şi deci $\frac{1}{K} \approx a$. Pentru presiuni mai mari însă, $\frac{1}{K}$ este dat de formula de mai sus.

Rezultă din cele spuse că pentru a modifica compresibilitatea metalelor cu 1%, este necesară o presiune de 1000 kg/cm², care duce la o schimbare a vitezei de propagare cu numai 0,5%.

În practică intervin însă şi presiuni hidrostatice mult mai mari. Astfel, dacă la suprafaţa unui metal se provoacă o detonaţie, presiunea hidrostatică din acel metal poate deveni de ordinul a 300 000 kg/cm². Pentru presiuni hidrostatice mai mari decît cele considerate de *Bridgman*, fie că se extrapolează rezultatele lui *Bridgman*, fie că se utilizează în locul lui (3.17) relaţia

$$p = A\left[\frac{V_0}{V}\right]^{\frac{2}{3}}\left\{\exp\left(\beta\,\frac{V_0^{\frac{1}{3}} - V^{\frac{1}{3}}}{V_0^{\frac{1}{3}}}\right) - 1\right\} \qquad (3.18)$$

propusă de *D. C. Pack*, *W. M. Evans* şi *H. J. James* [155] în 1948. Această relaţie poate fi utilizată pînă la cîteva sute de mii kg/cm². A şi β sînt nişte constante fizice. De exemplu (după *Broberg* [25]) ele sînt pentru fier: $A = 6{,}01.10^{11}$ dyne/cm², $\beta = 8{,}4$, $\rho_0 = 7{,}86.10^3$ kg/cm³, iar pentru aluminiu $A = 1{,}90.10^{11}$ dyne/cm², $\beta = 11{,}4$, $\rho_0 = 2{,}72.10^3$ kg/cm³. *Mallory* [133] dă pentru aluminiu $A = 20{,}603.10^{10}$ gr/cm², $\beta = 10{,}632$. După cum se vede, relaţia (3.18), ca de altfel şi (3.17) au fost utilizate atît pentru probleme statice cît şi pentru probleme dinamice. Dezvoltînd în serie în (3.18) şi considerînd numai primii doi termeni, obţinem în fond formula (3.17).

J. M. Walsch şi *R. H. Christian* [233] în 1955 au extins şi ei rezultatele lui *Bridgman* referitoare la relaţia dintre presiune şi com-

Scanned with OKEN Scanner

presibilitatea volumului. După cum am văzut, *Bridgman* studiase această relaţie pînă la presiunea de ordinul a 100 kilobar $= 10^{11}$ dyne/cm². Ei extind rezultatele lui pentru presiuni de ordinul 150—500 kilobar (1 kilobar $= 10^9$ dyne/cm² $= 986{,}9$ atmosfere). Ei au făcut şi unele experienţe dinamice pe epruvete de aluminiu şi aramă, undele de şoc fiind produse cu ajutorul unor detonatori. Curba $p \sim V$, propusă de ei are forma unei hiperbole

$$(p+\beta)(V-V_1)+\frac{p-p_1}{p_1+\beta}\,\frac{(V_0-V_1)\left(\beta+\frac{1}{2}p_1\right)}{\ln\frac{p_1+\beta}{\beta}}=0,\ \text{cu}\ \beta=\frac{c_p}{\alpha V_0} \tag{3.19}$$

în care p_0 şi V_0 reprezintă starea iniţială, p_1 şi V_1 reprezintă un punct oarecare de pe curba lui Hugoniot, iar c_p şi α sînt respectiv căldura specifică şi coeficientul de dilatare termică a volumului, ce se obţin din tabelele obişnuite.

Un grup de alţi autori [66] au extins la rîndul lor rezultatele lui *Bridgman* pentru presiuni mai mari (de la 100 kilobar pînă la 300 kilobar). Relaţia $p \sim V$ considerată de ei este de forma

$$p=\alpha\,\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}+\beta\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\right)^2 \tag{3.20}$$

iar experienţele pe care le-au efectuat, tot cu ajutorul unor detonatori, au fost făcute pe epruvete de duraluminiu, cadmiu şi oţel.

Trebuie să remarcăm că pe cînd experienţele lui *Bridgman* au fost statice, celelalte experienţe citate au fost dinamice. Pe de altă parte, pentru presiuni mai mici (pînă la 30 000 kg/cm² şi chiar mai mult) compresibilitatea depinde liniar de presiune. Pentru presiuni mai mari (cele care intervin în explozii sau la lovirea unui blindaj cu un obuz) aceasta în general nu mai are loc. Revenind la propagarea undelor, vom observa că pentru ca unda plastică să se propage mai repede decît cea elastică, este nevoie de presiuni foarte mari. Astfel *Broberg* [25] prelucrînd datele experimentale ale lui *Bridgman* arată că pentru oţel este nevoie pentru aceasta de o presiune de 530 000 kg/cm². *D. C. Pack*, *W. M. Evans* şi *H. J. James* [155] au arătat că aceasta are loc în plumb pentru 280 000 atmosfere.

În continuare să amintim şi rezultatele experimentale ale lui *Allen*, *Mapes* şi *Mayfield* [6]. Ei au lovit o placă metalică cu un glonte şi au fotografiat mişcarea aerului în spatele plăcii. În acest caz se pun în evidenţă unde de şoc propagabile în aer. Concluzia la care se ajunge este că pentru materiale a căror diagramă $\sigma \sim \varepsilon$ este astfel încît pe măsura creşterii deformaţiei, panta $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ variază continuu

(cupru, plumb), în aer apare o singură undă de şoc, corespunzătoare începutului lovirii. Dacă însă materialul plăcii are o diagramă $\sigma \sim \varepsilon$ ce poate fi aproximată prin schema lui Prandtl (oţel, alamă) atunci în aer se pun în evidenţă două unde de şoc; una corespunzătoare începutului lovirii şi alta începutului deformării plastice. Undele de şoc apărute în aer denotă existenţa undelor de şoc în placa lovită. De remarcat că o undă de şoc corespunzătoare deformaţiilor plastice nu a putut fi pusă în evidenţă decît pentru materiale cu $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ discontinuu.

Determinări experimentale referitor la caracteristicele undelor de şoc elastice şi plastice ce se propagă în unele metale (oţel sau aliaj de tungsten) datorită unor explozii, au fost făcute de *Stanley Minshall* [139].

Problema apariţiei undelor de şoc în metale în care limita de elasticitate este bine determinată, cînd aceste metale sub formă de bară sînt lovite longitudinal, a fost considerată de *M. P. White* [237] [236]. Ea arată că în acest caz, în bară se vor propaga chiar discontinuităţi ale tensiunii, deformaţiei şi ale vitezei particulelor.

Din cele de mai sus rezultă că în cazul presiunilor hidrostatice foarte mari pot apărea unde de şoc în solide. Pentru diferite mărimi ale acestei presiuni hidrostatice, sînt de aplicat diferite relaţii $p \sim V$ expuse mai sus şi de considerat deci diferite relaţii între compresibilitate şi presiune.

Cum pentru încărcări oricît de rapide, presiunea hidrostatică nu ajunge instantaneu la valoarea ei maximă, este posibil ca unda de şoc plastică să nu apară chiar de la capătul lovit al barei, ci undeva în interiorul ei, acolo unde ea ajunge din urmă alte unde pe care deformaţiile sînt mai mici. Şi în acest caz, viteza frontului undelor plastice ar putea suferi o discontinuitate într-o anumită secţiune a barei, sau ar putea fi variabilă. Aceste probleme, după cîte ştim, nu au fost încă considerate. Există însă o notă a lui *J. Savitt* [198] în care se arată experimental că viteza de propagare a frontului undelor plastice suferă, la o anumită distanţă de suprafaţa lovită, o discontinuitate. Materialul considerat de el erau plăci de bronz, iar undele longitudinale erau produse de o explozie provocată pe una din suprafeţele plăcii.

§ 4. ALTE PROBLEME

a) **Influenţa presiunii hidrostatice asupra concavităţii curbei $\sigma \sim \varepsilon$.** Într-o lucrare foarte interesantă, printre altele, *D. Wood* [242] a considerat problema propagării undelor plastice într-un aliaj de

aluminiu, cînd se ţine seama de influenţa presiunii asupra curbei $\sigma \sim \varepsilon$. *Wood*, utilizînd datele lui *Bridgman* pentru aluminiul pur, construieşte curba $\sigma \sim \varepsilon$ pentru aliajul respectiv de aluminiu în cazul presiunilor mari (fig. 24). Din această figură rezultă că în porţiunea deformaţiilor plastice, concavitatea curbei $\sigma \sim \varepsilon$ este dirijată în sus. Aceasta duce la formarea undelor de şoc. Viteza lor de propagare creşte o dată cu tensiunea şi poate deveni egală sau chiar să depăşească viteza undelor elastice.

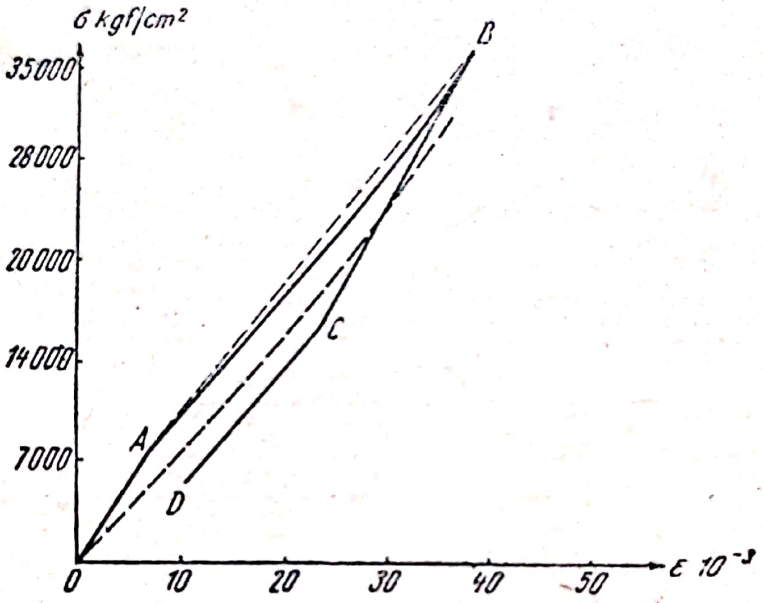

Fig. 24

b) **Influenţa temperaturii.** (*Wood* [242].) Relaţia tensiune-deformaţie şi deci diferitele viteze ale undelor, depind de variaţia temperaturii produsă de variaţii însemnate şi rapide ale presiunii. Creşterea temperaturii produsă de o comprimare rapidă pînă la presiuni mari, măreşte înclinarea curbei $\sigma \sim \varepsilon$, datorită dilatării termice. Deci şi viteza de propagare a undelor se va mări. În afară de aceasta, se accentuiază şi curbura curbei $\sigma \sim \varepsilon$ (care după cum am spus, este dirijată spre axa tensiunilor crescătoare), ceea ce măreşte posibilitatea apariţiei undelor de şoc. Problema aceasta nu este însă suficient studiată.

c) **Problema descărcării.** După cum am văzut mai sus, undele plastice pe care deformaţiile sînt mari, pot avea viteza de propagare mai mare decît viteza de propagare a undelor elastice. Deci pentru unele materiale puse în asemenea condiţii, teoretic descărcarea s-ar putea să nu mai fie posibilă, pentrucă undele de şoc de mari deformaţii nu pot fi ajunse din urmă de unda elastică de descărcare.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, multe materiale pentru care curba $\sigma \sim \varepsilon$ are concavitatea dirijată spre axa tensiunilor crescătoare, posedă relaţii $\sigma \sim \varepsilon$ neliniare (vezi Cap. VI. § 5). Descărcarea pentru asemenea materiale în principiu este posibilă, dar relaţia $\sigma \sim \varepsilon$ ce ar trebui adoptată pentru descărcare, ar trebui să fie de asemenea neliniară. *D. S. Wood* [242] a arătat că la aluminiu, în cazul presiunilor mari, cînd şi curba $\sigma \sim \varepsilon$ are concavitatea dirijată în sus, deşi undele plastice de şoc se propagă chiar cu o viteză mai mare decît undele elastice obişnuite, descărcarea este totuşi posibilă. Aceasta pentrucă, compresibilitatea hidrostatică variabilă influenţează şi propagarea undelor elastice de descărcare. Viteza lor este mai mare decît viteza obişnuită a sunetului (vezi Cap. VII). Pe de altă parte, *Wood* a arătat că în cazul marilor presiuni hidrostatice, descărcarea este un proces atît elastic, cît şi plastic (fig. 24). În fig. 24 curba întreruptă reprezintă curba statică $\sigma \sim \varepsilon$ pentru aluminiul pur, dată de *Bridgman*. Porţiunile OA şi AB corespund încărcării dinamice. De-a lungul lui OA materialul se deformează elastic, iar de-a lungul lui AB — plastic. Pe această porţiune, datorită concavităţii curbei apar unde de şoc. După cum se vede din figură, descărcarea este la început elastică (de-a lungul lui BC) şi apoi plastică (de-a lungul lui CD).

Consideraţii similare cu cele făcute de Wood dar pentru cazul undelor sferice, au fost făcute de *W. Goldsmith* [252].

Problema descărcării, aşa cum a fost expusă mai sus, după cîte ştiu, nu a fost suficient studiată. S-a considerat în special problema descărcării pentru cazul în care viteza undelor plastice este mult mai mică decît viteza undelor elastice şi cînd descărcarea este elastică liniar (vezi mai departe).

§ 5. ECUAŢIILE DE MIŞCARE

Să stabilim acum ecuaţiile de propagare ale undelor de şoc într-o bară. Aceste ecuaţii coincid în fond cu cele stabilite de *Rankine* şi *Hugoniot* pentru undele de şoc în gaze. Ideea de a studia propagarea deformaţiilor plastice cu ajutorul undelor de şoc (deci folosirea pentru aceasta a ecuaţiei conservării masei şi ecuaţia cantităţii de mişcare), se pare că aparţine lui *M. P. White* şi *Le van Griffis* [239] [240][1])

Să presupunem că unda se propagă cu viteza constantă c. După trecerea ei vom presupune că tensiunea, vitezele particulelor şi densitatea rămîn constante. Domeniul neperturbat şi cel perturbat sînt despărţite printr-o zonă de trecere de o anumită grosime carac-

[1]) Regretăm că nu am putut găsi nici una din aceste lucrări.

teristică fiecărui material. Pentru stabilirea ecuațiilor putem presupune pentru început că zona de trecere este fixă și că materialul trece prin ea de la dreapta la stînga [105]. Secțiunea barei va fi presupusă de arie constantă și unitară. Am notat cu v_1, σ_1 și ρ_1, viteza, tensiunea și densitatea după trecerea prin zona de trecere și cu v_2, σ_2 și ρ_2 aceleași entități în domeniul neperturbat.

Pentrucă în solide nu putem avea izvoare sau puțuri, masa care intră în zona de trecere în unitatea de timp, este egală cu masa care iese din această zonă tot în unitatea de timp. Notînd cu m această masă, avem

$$m = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 . \tag{3.21}$$

Întrucît materialul intră în zona de trecere cu viteza v_2 și o părăsește cu viteza v_1, teorema cantității de mișcare se scrie

$$m[v_2 - v_1] = \sigma_1 - \sigma_2 . \tag{3.22}$$

Lucrul mecanic consumat de bară în unitatea de timp este $\sigma_1 v_1 - \sigma_2 v_2$. El este egal cu suma variației energiei cinetice și a energiei interne a materialului, cînd se traversează zona de trecere. Să notăm cu ΔU variația energiei interne a unității de masă. Vom avea deci

$$\sigma_1 v_1 - \sigma_2 v_2 = m\left[\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \Delta U\right] . \tag{3.23}$$

Ecuația (3.21) este ecuația conservării masei, (3.22) este teorema cantității de mișcare, iar (3.23) este ecuația conservării energiei.

Din (3.21) și (3.22) obținem

$$v_2 = \frac{1}{\rho_2}\left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}}\right]^{\frac{1}{2}} . \tag{3.24}$$

În relațiile de mai sus, v_2 este viteza materialului în domeniul neperturbat. Întrucît am presupus că zona de trecere este nemișcată, această viteză este chiar viteza c de propagare a undei de șoc. Deci $m = \rho_2 c$.

Diferența dintre viteza particulelor în domeniul din spatele undei de șoc, și viteza particulelor din domeniul neperturbat, va fi $\Delta v = v_1 - v_2$. Din (3.21) și (3.22) rezultă

$$-\Delta v = v_2 - v_1 = \left[(\sigma_1 - \sigma_2)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\right]^{\frac{1}{2}} . \tag{3.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

Însfîrșit din (3.23) obținem

$$\Delta U = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right). \tag{3.26}$$

Ecuațiile (3.24), (3.25) și (3.26) sînt numite ecuațiile lui Rankine-Hugoniot pentru propagarea frontului undelor de șoc.

Prin definiție [62], variația energiei interne este dată de $dU = TdS - dA$, unde T este temperatura absolută, S entropia unității de masă și dA este lucrul forțelor interioare care se referă la unitatea de masă. Avem $dA = -d\Phi$, unde $d\Phi$ este lucrul forțelor exterioare consumat pentru deformare și care pentru cazul elastic coincide cu creșterea energiei potențiale a deformației.

Primele două ecuații ale lui Rankine-Hugoniot rămîn aplicabile și dacă în corp se emite o anumită energie chimică, cum ar fi de exemplu la undele provocate de explozii. În cele ce urmează noi nu vom folosi decît aceste prime două relații.

Pentru creșteri mici ale tensiunilor (3.24) se poate scrie

$$c = v_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho_2}}\left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.27}$$

căci $\varepsilon = \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1$. Deci viteza de propagare tinde, pentru diferențe mici ale tensiunilor, către viteza sunetului în mediul respectiv.

Să ținem seama acum că în realitate, zona de trecere este cea care se propagă, bara fiind inițial nemișcată. Aceasta influențează doar semnul vitezelor. Relația (3.22) deci, pentru cazul unei bare ce se mișcă de la dreapta la stînga și lovește un perete rigid, se poate scrie sub forma

$$\rho_2 c \Delta v = \Delta\sigma \tag{3.28}$$

iar din (3.27) și (3.28) obținem

$$\Delta v = c\Delta\varepsilon \qquad \text{sau} \qquad E_1 \Delta\varepsilon = \Delta\sigma. \tag{3.29}$$

În cazul cînd tensiunea nu depășește limita de elasticitate, viteza (3.27) se reduce la viteza constantă c_0 de propagare a undelor elastice. Relațiile (3.28) și (3.29) sînt bine cunoscute pentru cazul elastic. În (3.28) și (3.29) c poate avea semnul plus sau minus după sensul de propagare a undei respective.

În privința grosimii zonei de trecere, ea depinde de proprietățile mediului și este determinată de forțele disipative (*Kolsky* [105]). Cu cît saltul vitezei, la trecerea prin zona de trecere este

Scanned with OKEN Scanner

mai mare, cu atît influenţa forţelor disipative este mai mare. S-a arătat că pentru lichide această grosime este de ordinul de mărime al unui parcurs mediu liber al unei molecule. Pentru gaze grosimea zonei de trecere este de ordinul $10^{-5} - 10^{-7}$ cm. Cu cît saltul tensiunii este mai mic, cu atît grosimea acestei zone este mai mare. De exemplu pentru saltul tensiunilor egal cu 2, grosimea zonei de trecere este de ordinul 10^{-5} cm; dacă acest salt este egal cu 1000, grosimea zonei este de ordinul 10^{-7} cm. *J. M. Walsch* şi *R. H. Christian* [233] au atras atenţia că pentru solide (metale) se poate presupune că zona de trecere are grosimea de cîteva zecimi de milimetru.

Pentru mai multe detalii privind ecuaţiile undelor de şoc, a se vedea [62], [90] şi [215].

§ 6. APLICAŢII

a) **Cazul în care presiunea la capătul barei creşte instantaneu, rămîne constantă şi apoi scade la zero.** Acest caz a fost considerat de *H. A. Rahmatulin* şi *G. S. Şapiro* [179]. Fiindcă presiunea creşte instantaneu, undele care apar (atît cele elastice, cît şi cele plastice) trebuie considerate unde de şoc. Întrucît şi descărcarea este instantanee, undele din domeniul descărcării trebuie considerate şi ele unde de şoc. Materialul va fi presupus consolidabil liniar, iar bara semi-infinită.

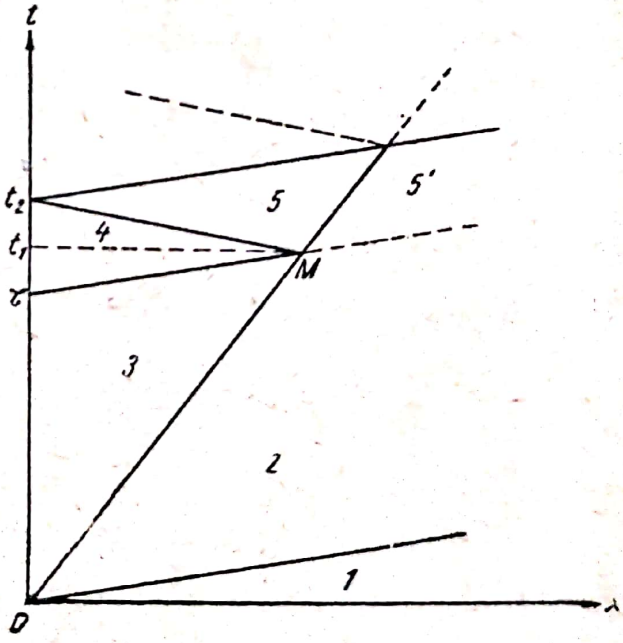

Fig. 25

Vom presupune că presiunea p de la capătul barei rămîne constantă în intervalul de timp $0 < t < \tau$. În planul (x, t) (fig. 25) vom distinge atunci trei regiuni. În regiunea *1* materialul este neperturbat ($\sigma_1 = \varepsilon_1 = v_1 = 0$). În regiunea *2* tensiunea este $\sigma_2 = \sigma_s$ deformaţia $\varepsilon_2 = \varepsilon_s$ iar viteza particulelor $v_2 = v_s = c_0\varepsilon_s$. Cele două regiuni sînt despărţite de dreapta $x = c_0 t$. Unda elastică de şoc se propagă cu viteza obişnuită a undelor elastice $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$. În regiunea *3* ten-

siunea este $\sigma_3 = p$, deformaţia $\varepsilon_3 = \varepsilon_s + \frac{\sigma_3 - \sigma_s}{E}$, iar vitezele particulelor $v_3 = v_s + c_1 (\varepsilon_3 - \varepsilon_s)$. Regiunea *2* este despărţită de regiunea *3* prin dreapta $x = c_1 t$; c_1 este viteza constantă de propagare a undelor într-un material consolidabil liniar $\left(c_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_0}}\right)$. Toate relaţiile de mai sus se obţin uşor din relaţiile (3.29), aplicate la traversarea zonelor de trecere reprezentate prin dreapta $x = c_0 t$ sau $x = c_1 t$.

La timpul $t = \tau$ presiunea la capătul barei scade brusc la zero. Aceasta duce la propagarea unei noi unde de şoc elastice în bară. Domeniul încărcării este despărţit de cel al descărcării prin dreapta $x = c_0 (t - \tau)$. În regiunea *4* care a luat naştere, $\sigma_4 = 0$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_3 - \frac{\sigma_3}{E} = (1 - \lambda^2)(\varepsilon_3 - \varepsilon_s)$ căci $\sigma_3 = E_1 (\varepsilon_3 - \varepsilon_s) + \sigma_s$. Viteza particulelor în regiunea *4* este

$$v_4 = v_3 - \frac{\sigma_3}{c_0 \rho_0} = v_3 - \left[\frac{E_1}{\rho_0 c_0}(\varepsilon_3 - \varepsilon_s) + \frac{E}{c_0 \rho_0}\varepsilon_s\right] =$$

$$= v_3 - \left[c_0 \varepsilon_s + \frac{c_1^2}{c_0}(\varepsilon_3 - \varepsilon_s)\right].$$

Punînd aici $v_3 = v_s + c_1 (\varepsilon_3 - \varepsilon_s)$ şi ţinînd seama că $\lambda = \sqrt{\frac{E_1}{E}}$, obţinem

$$v_4 = v_s + c_1 (\varepsilon_3 - \varepsilon_s) - c_0 \varepsilon_s - \frac{c_1^2}{c_0}(\varepsilon_3 - \varepsilon_s) =$$

$$= c_1 (\varepsilon_3 - \varepsilon_s)\left(1 - \frac{c_1}{c_0}\right) = c_1 (1 - \lambda)(\varepsilon_3 - \varepsilon_s). \qquad (3.30)$$

Deci viteza ce rămîne în domeniul descărcat *4* este pozitivă. În funcţie de mărimea presiunii p, putem avea trei posibilităţi

$$v_4 < v_s, \qquad v_4 = v_s, \qquad v_4 > v_s. \qquad (3.31)$$

În cazul $v_4 < v_s$ şi de asemenea în cazul $v_4 = v_s$, după întîlnirea undei de descărcare cu frontul undei plastice, intensitatea ultimei scade. Unda plastică nu se mai propagă. Din punctul de intersecţie al celor două unde, se vor propaga acum două unde elastice cu viteza c_0. Una este directă şi alta inversă, reflectată. Cea inversă se va reflecta la capătul liber al barei şi apoi se va propaga şi ea în sens direct. Din acest moment, se vor propaga în bară trei unde directe cu viteza c_0. În bară nu se mai produc noi deformaţii plastice,

Scanned with OKEN Scanner

iar porțiunea de bară deformată plastic este $l = \frac{c_0 c_1 \tau}{c_0 - c_1}$. Această formulă este datorită lui *M. P. White* și *Le van Griffis* [239].

Să examinăm acum cazul $v_4 > v_s$. Acest caz este mai complex, existînd mai multe posibilități.

Rahmatulin și *Șapiro* își pun întîi problema, de a vedea în ce condiții, chiar pentru $v_4 > v_s$, cele două unde care apar în punctul M (fig. 25) sînt elastice. Să scriem pentru aceasta ecuația cantității de mișcare pentru frontierele dintre domeniile *4* și *5*, precum și dintre *2* și *5'*. Obținem

$$-c_0\rho(v_4 - v_5) = -\sigma_5, \qquad c_0\rho(v_s - v_5) = \sigma_s - \sigma_5. \quad (3.32)$$

De aici rezultă

$$v_5 = \frac{v_4}{2} \quad (3.33)$$

și deci că $\sigma_s = \sigma_5$ cînd $v_5 = v_s = \frac{1}{2} v_4$. Deci dacă $v_4 \leqslant 2v_s$ ambele unde sînt elastice. Dacă $v_4 = 2v_s$ și deci $\sigma_5 = \sigma_2 = \sigma_s$, nu va mai exista un front al undelor care să despartă domeniul *2* de *5'*, și deci de la punctul de întîlnire se va propaga o singură undă elastică inversă, pe care tensiunea de compresiune este σ_s. În domeniile *2,5* și *5'* vom avea aceeași stare de tensiune, deformație și viteze.

Este clar că pentru $v_4 > 2v_s$ unda ce se propagă la dreapta de punctul M nu poate să mai fie elastică. În acest caz unda plastică inițială va continua să se propage cu o intensitate slăbită.

Să calculăm mărimea încărcării inițiale, care corespunde lui $v_4 = 2v_s$. În acest caz, din (3.30) obținem

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_s \left[1 + \frac{2}{\lambda(1-\lambda)}\right] = \varepsilon_k. \quad (3.34)$$

Deci dacă $\varepsilon_3 \leqslant \varepsilon_k$, în punctul M undele devin elastice. Pentru $\varepsilon_3 > \varepsilon_k$ adică $v_4 > 2v_s$, unda directă continuă să se propage și este plastică.

Să arătăm că unda reflectată ce se propagă spre stînga este totdeauna elastică. Ecuația (3.28) aplicată la trecerea de la domeniul *4* la domeniul *5* și apoi de la *2* la *5*, dă

$$-c_0\rho(v_4 - v_5) = -\sigma_5, \qquad c_1\rho(v_s - v_5) = \sigma_s - \sigma_5. \quad (3.35)$$

Pentru $\sigma_5 = \sigma_s'$, unde σ_s' este noua limită de elasticitate a materialului, ambele unde vor fi plastice, adică $\sigma_s' \geqslant \sigma_3$. Din (3.35) obținem

Scanned with OKEN Scanner

$v_4 - v_s = \left(\frac{1}{c_1\rho} + \frac{1}{c_0\rho}\right)\sigma_5 - \frac{\sigma_s}{c_1\rho}$ sau, ţinînd seama de (3.30):

$(1-\lambda)\, c_1 \frac{\sigma_3 - \sigma_s}{E_1} - c_0 \frac{\sigma_s}{E} = \left(\frac{1}{c_1\rho} + \frac{1}{c_0\rho}\right)\sigma_5 - \frac{\sigma_s}{c_1\rho}$ sau, însfîrşit

$$\sigma_5 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\sigma_3. \tag{3.36}$$

De aici rezultă neapărat că $\sigma_5 < \sigma_3$, adică unda reflectată ce se propagă spre stînga este totdeauna elastică.

Să calculăm acum lungimea porţiunii de bară, deformată plastic. Pentru început să presupunem $\varepsilon_3 < \varepsilon_k$. Notînd cu l_3 această lungime, adică lungimea porţiunii de bară deformată plastic datorită deformaţiilor plastice din regiunea *3*, avem

$$c_1(\tau + t) = l_3 \quad \text{şi} \quad c_0 t = l_3 \tag{3.37}$$

unde t este timpul necesar undei de descărcare pentru a ajunge frontul undelor plastice. Din (3.37) obţinem formula dată mai sus $l_3 = \frac{c_0 c_1 \tau}{c_0 - c_1}$.

Să considerăm acum cazul $\varepsilon_1 > \varepsilon_k$. Să notăm cu t^* timpul necesar undei reflectate pentru a ajunge de la frontul undelor plastice pînă la capătul din stînga al barei. În acelaşi timp, frontul undelor plastice parcurge spaţiul ξ. Avem deci $\xi = c_1 t^*$ şi $l_3 = c_0 t^*$ sau $\xi = \frac{c_1}{c_0} l_3$.

Deci în momentul cînd unda reflectată ajunge la capătul barei, frontul undei plastice se află la distanţa $l_3\left[1 + \frac{c_1}{c_0}\right]$. Să notăm cu t timpul necesar undei reflectate la capătul liber al barei, pentru a ajunge din nou frontul undei plastice. Obţinem $l_3\left[1 + \frac{c_1}{c_0}\right] + c_1 t = l_5$ şi $c_0 t = l_5$, unde l_5 este lungimea căutată a porţiunii de bară deformată plastic, şi care este lungimea domeniului *5*.

Eliminînd pe t şi punînd $l_3 = \frac{c_0 c_1 \tau}{c_0 - c_1}$ obţinem

$$l_5 = \frac{c_0 + c_1}{c_0 - c_1} l_3 = \frac{\lambda(1+\lambda)}{1-\lambda} c_0 \tau.$$

Această formulă este datorită lui *Rahmatulin* şi *Şapiro*. Ea corespunde cazului în care unda de descărcare se reflectă o singură dată la capătul liber al barei şi apoi, la cea de a doua întîlnire cu frontul undei plastice, unda plastică nu se mai propagă. De acum înainte în bară se propagă numai unde elastice.

Scanned with OKEN Scanner

Considerații similare se pot face și în cazul în care unda de descărcare se reflectă de mai multe ori de capătul liber și apoi de frontul undei plastice. Este vorba de cazul cînd tensiunea σ_3, datorită lovirii, depășește cu mult limita de elasticitate σ_s.

b) **Aplicație la bara de cupru.** *Kalman J. DeJuhasz* [97] a prezentat la cel de al doilea congres de matematici aplicate de la Londra (1948), o metodă grafică foarte simplă de studiu a propagării undelor de șoc în bare metalice. Ecuațiile de care se folosește sînt cele date în § 4, iar metoda este asemănătoare cu cea dată de *Rahmatulin* și *Șapiro*. *DeJuhasz* consideră mai multe cazuri. Pentru exemplificare dăm mai jos doar unul din ele: lovirea unei bare semi-infinite, cînd prin lovire limita de elasticitate este puțin depășită. Aplicația se face pentru bare de cupru recopt, astfel încît diagrama $\sigma \sim \varepsilon$ poate fi aproximată cu o schemă Prandtl, în care $E = 0{,}985 \cdot 10^{10}$ kg·cm^{-2} și $E_1 = 224{,}96 \cdot 10^{10}$ kg·m^{-2}, $\sigma_s = 2{,}5 \cdot 10^6$ kg·m^{-2} și $\rho = 917$ kg·m^{-4} s^2. Vitezele de propagare sînt deci $c_0 = 3\,270$ m·s^{-1} și $c_1 = 493$ m·s^{-1}. Vor mai interveni în calcule și rapoartele $\frac{E}{c_0} = 3{,}01 \cdot 10^6 \frac{\text{kg m}^2}{\text{m s}^{-1}}$ și $\frac{E_1}{c_1} = 455\,920 \frac{\text{kg m}^2}{\text{m s}^{-1}}$. Timpul de impact a fost luat $\tau = 1$ s (încărcarea și descărcarea fiind instantanee), iar intensitatea a fost de $2{,}812 \cdot 10^6$ kg·m^{-2} și deci a depășit cu puțin limita de elasticitate.

La timpul t_1 avem $(t_1 - \tau)\ c_0 = t_1 c_1$ și deci $t_1 = \frac{c_0 \tau}{c_0 - c_1} = 1{,}178$ s și $t_1 - 1 = \frac{c_1}{c_0 - c_1} = 0{,}178$ s. Obținem similar $t_2 = \frac{c_0 + c_1}{c_0 - c_1} \tau = 1{,}356$ s și $t_2 - 1 = \frac{2c_1}{c_0 - c_1} = 0{,}356$ s. În regiunea *1* materialul este neperturbat ($\sigma_1 = v_1 = 0$). În regiunea *2* materialul este la limita de elasticitate ($\sigma_2 = \sigma_s$, $v_2 \neq 0$). Deci $v_2 = \sigma_2 \frac{c_0}{E} = 0{,}81972$ m·s^{-1}. Pentru că tensiunea de impact este $\sigma_3 = 2{,}812 \cdot 10^6$ kg·m^{-2}, din (3.28) $\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{v_3 - v_2} = \frac{E_1}{c_1}$, rezultă $v_3 = 1{,}158137$ m·s^{-1}. În domeniul de descărcare *4* avem $\sigma_4 = 0$, deci din $\frac{\sigma_3 - \sigma_4}{v_3 - v_4} = \frac{E_0}{c_0}$ deducem pe $v_4 = 0{,}65274$ m·s^{-1}. Pentru regiunea *5* avem două condiții $\frac{\sigma_5 - \sigma_4}{v_5 - v_4} = \frac{E_0}{c_0}$ și $\frac{\sigma_5 - \sigma_1}{v_5 - v_1} = \frac{E_0}{c_0}$. Din ele deducem $v_5 = \frac{v_4}{2} = 0{,}32637$ m·s^{-1} și $\sigma_5 = 977\,080$ kg·m^{-2}. Întrucît tensiunea în domeniul *5* este inferioară limitei de elasticitate, în continuare în bară se vor propaga doar unde elastice.

DeJuhasz calculează în continuare și energia. Energia consumată este $\mathcal{E}_1 = \sigma_3 v_3 \tau = \sigma_3 v_3$. Ea este distribuită astfel: energia stării σ_2, v_2 pentru o bară de lungime c_0 este $\mathcal{E}_2 = \sigma_2 v_2$; energia stării σ_5, v_5 pentru o bară de lungime $(l_2 - \tau) c_0$ este $\mathcal{E}_3 = (l_2 - 1) \sigma_5 v_5$; energia de deformare pentru bara de lungime $(l_1 - 1) c_0$ este $\mathcal{E}_4 = (l_1 - 1) c_0 \frac{\sigma_3^2 - \sigma_1^2}{2} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E} \right)$.

Din legea de conservare a energiei avem $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$, sau

$$\sigma_2 v_3 = \sigma_2 v_2 + \frac{2c_1}{c_0 - c_1} \frac{E_0}{c_0} l_5^2 + \frac{c_0 c_1}{c_0 - c_1} \frac{1}{2} (\sigma_3^2 - \sigma_2^2) \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E} \right).$$

Dacă ținem acum seama de relațiile utilizate mai sus, obținem o identitate. *DeJuhasz* a verificat această identitate și numeric, pentru bare de cupru.

Folosindu-se de valorile numerice date mai sus, *DeJuhasz* construiește o serie de stereograme sugestive, în care sînt reprezentate variațiile în timp și spațiu ale lui σ, v, u (deplasarea), precum și diagrama distribuției în timp a energiilor.

În exemplul de mai sus, tensiunea de impact depășea cu puțin limita de elasticitate și deci la prima întîlnire dintre unda de descărcare și frontul undei plastice, procesul de deformare plastică încetează. Dacă tensiunea de impact depășește cu mult limita de elasticitate, atunci unda de descărcare se reflectă de frontul undei plastice și apoi de capătul barei, de mai multe ori. Acest caz a fost de asemenea considerat de *DeJuhasz* pentru viteza de impact $v_3 = 2\,530$ m · s^{-1}. În acest caz de abia la a șasea întîlnire dintre unda elastică de descărcare și frontul undei plastice, deformarea plastică încetează.

Notînd ca și pînă acum cu l_{2n+1} distanța de la capătul barei pînă la secțiunea în care se produce a n-a întîlnire dintre frontul undei de descărcare și frontul undei plastice, deformația plastică după 6 întîlniri este

$$\varepsilon_p = \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E} \right) [(\sigma_3 - \sigma_2) l_3 + (\sigma_5 - \sigma_2)(l_5 - l_3) + (\sigma_7 - \sigma_2)(l_7 - l_5) + (\sigma_9 - \sigma_2)(l_9 - l_7) + (\sigma_{11} - \sigma_2)(l_{11} - l_9) + (\sigma_{13} - \sigma_2)(l_{13} - l_{11})].$$

Această formulă este datorită lui *DeJuhasz*.

c) **Alte lucrări.** Problema propagării undelor de șoc în bare semiinfinite a mai fost studiată de *N. F. Lebedev* [112]. Metoda utilizată, care se bazează pe unele considerații fizice, este diferită de cea a lui *Rahmatulin* și *Șapiro* [179]. Materialul este considerat consolidabil neliniar și se consideră mai multe tipuri de încărcare la capătul barei. Este dată și o metodă grafică de determinare a tensiunilor la capătul barei, cînd este cunoscută unda de descărcare; o metodă de

construire a undei de descărcare cînd se cunosc un punct al ei şi legea de variaţie a tensiunii la capătul barei; etc. În general se înlocuiesc calculele analitice prin construcţii grafice.

D. F. Lazutkin [110] a considerat de asemenea problema propagării undelor de şoc în bare semi-infinite, utilizînd ecuaţia cantităţii de mişcare. Materialul este considerat consolidabil neliniar, curba $\sigma \sim \varepsilon$ fiind aproximată printr-un şir de segmente, al căror număr este făcut apoi să tindă către infinit. Pe diferitele segmente este aplicată teoria binecunoscută de la materialele consolidabile liniar. Privitor la încărcarea de la capătul barei, se presupune că ea creşte după o lege oarecare şi apoi scade instantaneu la zero. Ca un caz particular se consideră că presiunea la capătul barei creşte instantaneu, rămîne un timp constantă şi apoi scade instantaneu la zero.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

BARA FINITĂ

§ 1. REFLECTAREA UNDELOR

Problema barei finite este mult mai complicată decît a unei bare suficient de lungi, care poate fi considerată « semi-infinită ». Cazurile în care bara este considerată « finită » sînt acelea în care undele elastice, reflectate de cel de al doilea capăt, produc un efect ce nu poate fi neglijat.

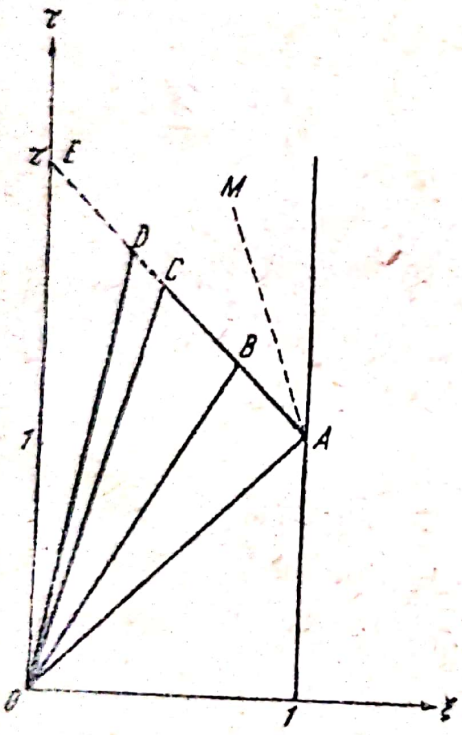

Fig. 26

Problema barei finite a fost considerată de *G. S. Șapiro* [194] în 1946 și de *M. P. White* [237], *DeJuhasz* [97] și *V. S. Lenski* [124] în 1949. Ulterior, această problemă a fost considerată și de alți autori pe care îi vom cita mai jos.

Să considerăm o bară de lungime l și să presupunem că bara este încărcată la unul din capete cu o presiune care, după ce crește instantaneu, rămîne constantă într-un interval de timp.

În acest caz, tabloul propagării undelor este înfățișat în fig. 26.

Prima se propagă unda elastică OA. Ajunsă în capătul barei, această undă se comportă diferit după cum acest capăt este liber, fixat rigid sau dacă bara se continuă printr-un mediu de altă densitate.

Să presupunem pentru început că la al doilea capăt bara este liberă. După trecerea undei elastice, în bară tensiunea este σ_s, iar deplasarea este dată de

$$u_1 = f_1 (c_0 t - x). \qquad (4.1)$$

Pe undele elastice directe, relaţia dintre tensiune şi deplasare este

$$\sigma_1 = E\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{E}{c_0}\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\rho c_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} \tag{4.2}$$

iar pe undele inverse

$$u_2 = f_2(c_0 t + x) \tag{4.3}$$

şi

$$\sigma_2 = \rho c_0 \frac{\partial u_2}{\partial t}. \tag{4.4}$$

Deci pe unda elastică tensiunea este proporţioală cu viteza. După reflectarea la capătul liber, cele două tensiuni se adună. Tensiunea rezultantă va fi deci

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = E\left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right] = E\,[f_2'(c_0 t + x) - f_1'(c_0 t - x)]. \tag{4.5}$$

La capătul $x = l$, tensiunea este însă nulă, deci

$$f_2'(c_0 t + l) - f_1'(c_0 t - l) = 0. \tag{4.6}$$

Deci tensiunea pe unda reflectată va fi egală cu cea de pe unda directă, dar cu semnul schimbat. [Aceasta rezultă mai uşor dacă luăm originea în punctul L; atunci (4.6) devenea $f_2'(c_0 t) - f_1'(c_0 t) = 0$.] Deci un impuls de compresiune devine prin reflectare un impuls de întindere, şi invers. Deci unda de încărcare OA se va reflecta ca o undă de descărcare AB. Deplasarea pe unda reflectată este suma deplasărilor:

$$u = u_1 + u_2 = f_1(c_0 t - x) + f_2(c_0 t + x). \tag{4.7}$$

Rezultă că la capătul $x = l$, deplasarea este de două ori mai mare [dacă originea ar fi fost luată în acest capăt, (4.7) s-ar fi scris $u = 2f(c_0 t)$]. Prin urmare şi viteza particulelor la acest capăt este de două ori mai mare decît viteza de pe unda directă. Deci şi pe unda reflectată viteza particulelor va fi de două ori mai mare.

Să presupunem acum că al doilea capăt al barei este fixat rigid. Atunci la acest capăt deplasarea este nulă. Din (4.7) rezultă atunci $f_1(c_0 t - l) = -f_2(c_0 t + l)$ şi deci deplasarea pe unda reflectată este egală în mărime cu cea de pe unda directă, dar are semnul schimbat. Din (4.2) şi (4.4) rezultă atunci că cele două tensiuni sînt egale şi de acelaşi semn. Deci, dacă al doilea capăt al barei este fixat, tensiunea pe unda reflectată va fi de două ori mai mare decît pe unda directă. Pentru că am presupus că pe unda directă, tensiunea

Scanned with OKEN Scanner

atinge limita de elasticitate σ_s, atunci unda reflectată va deveni plastică (tensiunea $2\sigma_s$). Frontul ei este reprezentat în fig. 26 prin dreapta AM.

În cazul în care la capătul barei avem un mediu de altă densitate, problema se complică. Unda directă OA, ajunsă în capătul barei, se va refracta în celălalt mediu, dar se va şi reflecta înapoi în bară. Această undă inversă se reflectă tot ca o undă plastică de încărcare, dar pe ea tensiunea este mai mică decît dacă capătul barei ar fi fost rigid fixat.

§ 2. UNDA REFLECTATĂ DE DESCĂRCARE
(cazul materialelor cu $\sigma \sim \varepsilon$ convex)

În cele ce urmează vom examina care este influenţa undei inverse (reflectate) de descărcarea AB asupra undelor directe elastice şi plastice. Vom presupune deci că la al doilea capăt bara este liberă. Această problemă a fost considerată de mai mulţi autori. În expunerea de mai jos vom utiliza în special lucrarea lui *E. H. Lee* [114].

a) Vom presupune că curba $\sigma \sim \varepsilon$ pentru materialul respectiv nu depinde de viteza de deformare şi că ea are convexitatea dirijată spre axa tensiunilor (deci undele de şoc ar putea apărea numai datorită condiţiilor la limită sau iniţiale).

În domeniul deformaţiilor plastice, este satisfăcută ecuaţia (1.3), iar caracteristicele şi relaţiile satisfăcute pe ele sînt date de (1.19):

$$\frac{dx}{dt} = \mp c, \qquad v \mp \psi = \text{const}. \tag{4.8}$$

Descărcarea va fi considerată elastică, deci satisfăcînd pe (1.26), iar ecuaţia de mişcare în domeniul respectiv va fi (1.27). Caracteristicele şi relaţiile satisfăcute pe ele sînt

$$\frac{dx}{dt} = \mp c_0, \qquad \rho c_0 v \mp \sigma = \text{const}. \tag{4.9}$$

Să introducem coordonatele adimensionale $\tau = \frac{c_0 t}{l}$ şi $\xi = \frac{x}{l}$. În coordonate adimensionale, relaţiile (4.8) şi (4.9) devin respectiv

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \mp 1, \qquad \rho c_0 v \mp \sigma = \text{const} \tag{4.10}$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \mp c', \qquad \rho c_0 v \mp \rho c_0 \psi = \text{const} \tag{4.11}$$

cu $c' = \frac{c}{c_0}$.

b) Să examinăm acum problema lovirii barei de lungime l de o placă rigidă, viteza de lovire fiind v_0. Condiţiile iniţiale şi la limită sînt

$$\begin{array}{llll} v = 0, & \sigma = 0, & \tau = 0 & \\ v = v_0, & \xi = 0, & \tau > 0 & 0 < \xi \leqslant 1 . \\ \sigma = 0, & \xi = 1, & \tau > 0 & \end{array} \qquad (4.12)$$

Caracteristicele au fost arătate în fig. 26. De-a lungul lor viteza şi tensiunea sînt constante. Pe frontul undei elastice OA, tensiunea creşte instantaneu pînă la limita de elasticitate σ_s. Caracteristica OD corespunde vitezei v_0 astfel încît în triunghiul ODE materialul se mişcă cu viteza constantă v_0 şi este supus unei tensiuni constante.

Întrucît capătul barei este liber, unda elastică se reflectă tot ca undă elastică (viteza de propagare c_0). Ea este o undă de descărcare şi de şoc. În punctul A, după cum am văzut, tensiunea este nulă. Pe măsură ce se propagă, intensitatea undei de descărcare scade. Sub această undă, materialul se găseşte în stadiul plastic în care se produce încărcarea, iar deasupra ei el este în stadiul elastic, căci se produce descărcarea. În fiecare punct de pe caracteristica AC sînt cunoscute mărimile σ_b, ε_b şi v_b (indicele b se referă la valorile entităţilor respective înainte de trecerea undei AC, iar indicele a la valorile aceloraşi entităţi după trecerea undei AC) din soluţia problemei referitoare la undele directe. Din teorema cantităţii de mişcare, corespunzătoare lui (4.9), obţinem

$$\sigma_a - \sigma_b = -\rho c_0 (v_a - v_b) . \qquad (4.13)$$

Dar în punctul A, $\rho c_0 v_b = \sigma_b = \sigma_s$. Din (4.13) rezultă atunci $\rho c_0 v_a = 2\sigma_s$. Să determinăm constanta din (4.10) prin condiţiile în punctul A. Atunci avem de-a lungul caracteristicei vecine cu AC

$$\rho c_0 v_a - \sigma_a = 2\sigma_s . \qquad (4.14)$$

Eliminînd pe v_α din (4.13) şi (4.14) găsim

$$\sigma_a - \sigma_b = -\frac{2\sigma_s - (\rho c_0 v_b - \sigma_b)}{2} . \qquad (4.15)$$

Din (4.8) obţinem

$$\rho c_0 v_b = \rho c_0 \int_0^{\varepsilon_b} c\, d\varepsilon = \int_0^{\sigma_b} \frac{c_0}{c}\, d\sigma \qquad (4.16)$$

căci $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \rho c^2$. Pentru că în domeniul elastic $c = c_0$, iar pentru deformaţii plastice $c < c_0$, din (4.16) rezultă că în (4.15) mărimea $\rho c_0 v_b - \sigma_b = 0$ în punctul A, şi creşte apoi de la A la C (fig. 26). Deci unda de şoc, de descărcare, se amortizează monoton. Dacă viteza de lovire este inferioară unei anumite viteze critice, ce rezultă

Scanned with OKEN Scanner

din (4.15), atunci unda de şoc dè descărcare se propagă pînă în punctul E; pentru viteze mai mari, unda de descărcare este absorbită de undele plastice directe. Prin urmare există posibilitatea ca undele plastice să se propage dincolo de CD, dacă în C s-a oprit unda de descărcare. În punctul C, pe unda de descărcare $\sigma_a = \sigma_b$.

Deci există două posibilităţi, în funcţie de mărimea vitezei de impact; începînd din punctul C, domeniul plastic poate să se continue deasupra lui AE, sau materialul se descarcă peste tot deasupra lui AC. Chiar şi în acest ultim caz, nu este sigur că deasupra lui AC nu vor apărea noi regiuni plastice. Dacă într-o secţiune oarecare a barei soluţia ecuaţiei din domeniul descărcării conduce la o tensiune egală cu cea mai mare tensiune atinsă în această secţiune mai înainte, atunci curgerea plastică este din nou posibilă. În acest caz va exista un nou domeniu în care va trebui aplicată ecuaţia undelor plastice.

c) Să arătăm cum se determină frontiera dintre domeniul deformaţiilor plastice P şi domeniul descărcării U. Această determinare a fost făcută de *Th. Kármán*, *H. Bohnenblust* şi *D. Hyers* (vezi *Lee* [114]). De-a lungul acestei frontiere derivatele tensiunii şi vitezei suferă discontinuităţi. Să notăm cu indicii p şi u valorile diferitelor mărimi în domeniul deformaţiilor plastice şi respectiv în domeniul elastic de descărcare.

Pe baza continuităţii, diferenţialele pe ambele părţi ale frontierei sînt egale, adică

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sigma_x^p\,dx + \sigma_t^p\,dt = \sigma_x^u\,dx + \sigma_t^u\,dt \\ dv &= v_x^p\,dx + v_t^p\,dt = v_x^u\,dx + v_t^u\,dt. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ţinînd seama de ecuaţiile de mişcare şi de continuitate $\sigma_x = -\rho v_t$, $\sigma_t = -\rho c^2 v_x$, din (4.17) se pot elimina toate derivatele în afară de σ_t. Astfel

$$\frac{\sigma_t^p}{\sigma_t^u} = \frac{1 - \frac{1}{c_0^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \varkappa \tag{4.18}$$

unde, pentru a avea loc deformaţii plastice $\sigma_t^p \geqslant 0$. Există două posibilităţi: I. elementul de pe frontieră trece din U în P; II. elementul trece din P în U. Să examinăm ambele cazuri simultan.

I $U \to P$

$\sigma_t^u \geqslant 0$

$\varkappa \geqslant 0$

$\left|\frac{dx}{dt}\right| \geqslant c_0$ sau $\left|\frac{dx}{dt}\right| \leqslant c$

II $P \to U$

$\sigma_t^u \leqslant 0$

$\varkappa \leqslant 0$

$c \leqslant \left|\frac{dx}{dt}\right| \leqslant c_0$

Scanned with OKEN Scanner

în caz contrar

$$\sigma_t^p = \sigma_t^u = 0$$

Cînd $\sigma_t^p = \sigma_t^u = 0$, din (4.17) rezultă că $\sigma_x = 0$, sau $\frac{1}{\rho}\frac{d\sigma}{dv} = -\frac{dx}{dt}$. Aceste condiţii servesc pentru determinarea frontierei, dacă soluţia este găsită prin metoda caracteristicelor.

d) *E. H. Lee* aplică consideraţiile precedente pentru studiul propagării undelor în bare de aluminiu. Pentru barele de aluminiu, curba $\sigma \sim \varepsilon$ este dată în fig. 27. Pentru acest material, unda inversă de descărcare, pe care avem discontinuităţi pentru tensiuni, se propagă pînă la secţiunea lovită a barei, cînd $v_0 < 9{,}2$ m/s. Pentru valori mai mari ale vitezei, unda de descărcare se opreşte înainte de a ajunge la capătul barei şi domeniul plastic se propagă deasupra

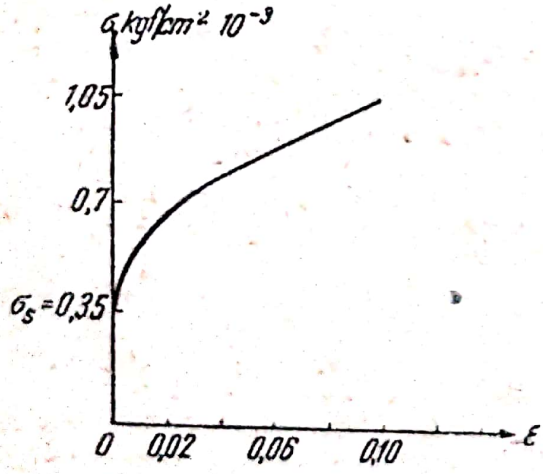

Fig. 27

în caz contrar

$$\sigma_t^p = \sigma_t^u = 0$$

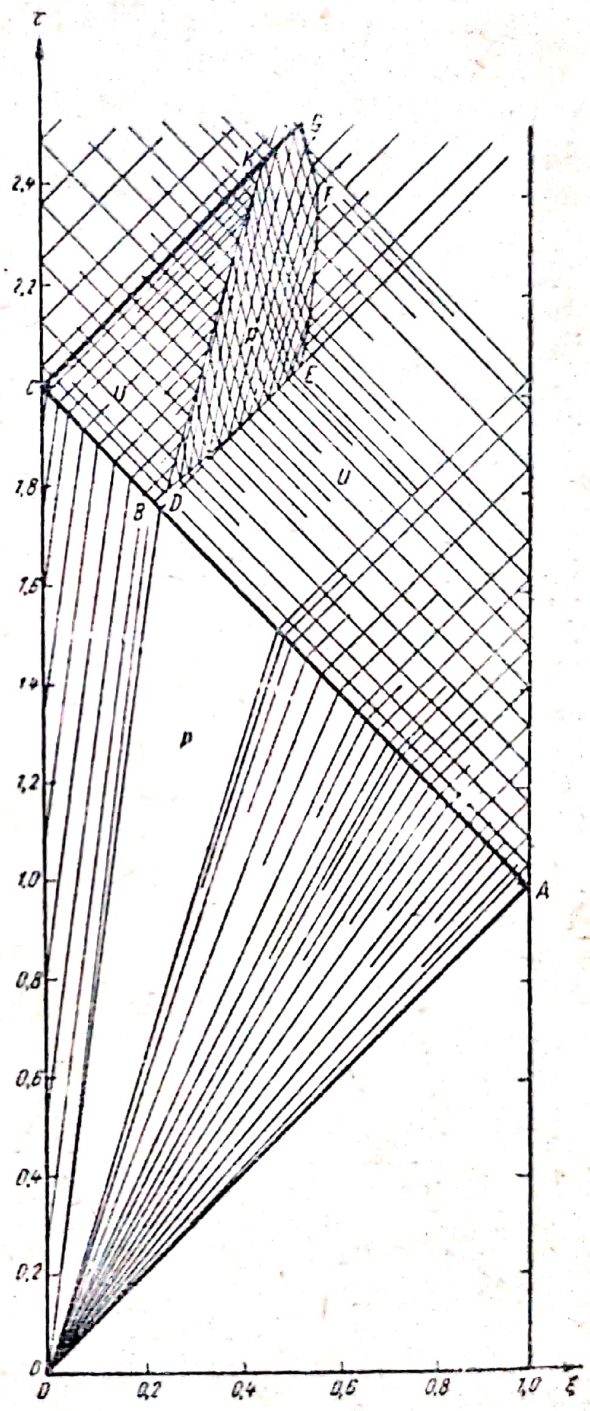

Fig. 28

ei. *Lee* consideră cazul $v_0 = 9{,}03$ m/s, cîmpul caracteristicelor fiind reprezentat în fig. 28. Pentru această viteză de lovire, unda de descărcare traversează întreaga bară şi apoi se reflectă de capătul

Scanned with OKEN Scanner

lovit. După trecerea ei apare un nou domeniu plastic. Saltul tensiunii pe unda de descărcare descreşte de la mărimea limitei de elasticitate de 350 kg/cm² în punctul A, pînă la valoarea constantă de 9,2 kg/cm² de-a lungul lui BC.

Soluţia pentru domeniul de deasupra undei de şoc AC se poate obţine formal cu ajutorul relaţiilor caracteristice (4.9), dacă se presupune că condiţiile de descărcare se păstrează. Înainte de aceasta trebuie să ne convingem că tensiunea în fiecare secţiune nu depăşeşte cea mai mare valoare atinsă înainte de trecerea undei de descărcare AC. Se arată că această depăşire are loc în punctul D. Caracteristica OB este frontul undelor pe care tensiunea are cea mai mare valoare. În OBC tensiunea este constantă şi egală cu tensiunea maximă de lovire. În domeniul de descărcare, în punctul D, apare o nouă regiune de deformaţii plastice, datorită interacţiunii undelor şi al transportului discontinuităţii tensiunii de-a lungul lui BD. Prin condiţii analoge se determină secţiunile în care noua limită de elasticitate este atinsă. Aceasta duce la determinarea frontierei DE dintre domeniul deformaţiilor plastice şi al descărcării (vezi cazul I de la punctul precedent). Pentrucă $\frac{dx}{dt} > c_0$ $\left(\frac{d\xi}{d\tau} > 1\right)$, nu mai sînt necesare nici un fel de alte condiţii; două caracteristice ce se intersectează în U şi valoarea cunoscută a lui $\sigma_{max} = \sigma_b$ pe AC, determină poziţia acestei frontiere. Dacă aceste condiţii se continuă deasupra lui E, atunci se arată că $\frac{dx}{dt} < c_0$. În acest caz este necesar să se folosească alte condiţii date în subpunctul precedent. Evident că vechile condiţii nu mai sînt valabile în acest domeniu deoarece caracteristica intersectează domeniul deformaţiilor plastice şi nu mai poate fi folosită pentru determinarea frontierei. Totuşi prelungirea convenţională a frontierei DE, deasupra lui E se foloseşte pentru precizarea poziţiei lui E. Pentru că frontiera este tangentă caracteristicei $\frac{d\xi}{d\tau} = +1$ în punctul E, în acest punct $\frac{\partial(\rho c_0 v + \sigma)}{\partial s} = 0$, unde s este arcul pe frontieră. Prin urmare poziţia lui E se poate determina prin reprezentarea lui $(\rho c_0 v + \sigma)$ pentru ambele părţi ale lui E. Cu ajutorul condiţiilor cunoscute de-a lungul frontierei DE, se poate construi prin metoda caracteristicelor soluţia în domeniul deformaţiilor plastice.

Dezvoltarea în serie de puteri în jurul lui E a variabilelor arată că panta frontierei suferă aici o discontinuitate; $\frac{dx}{dt}$ devine mai mic decît c şi frontiera EF se determină cu ajutorul caracteristicelor

Scanned with OKEN Scanner

în P și U, și cu valoarea cunoscută σ_{max} a limitei de elasticitate în fiecare secțiune. Determinarea lui EF dă posibilitatea să se extindă cîmpul plastic. În punctul F frontiera devine verticală astfel încît pentru determinarea ei mai departe trebuie să facem uz de cazul II și de condițiile corespunzătoare. Se găsește că $\frac{dx}{dt}$ este mai mic decît c și pentru determinarea lui FG trebuie să se folosească condiția $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\sigma}{dv}$ împreună cu cîte o caracteristică din P și U.

Partea superioară a frontierei DK a domeniului plastic P se determină cu ajutorul a două caracteristice din P și cu una din U. Aici $\frac{dx}{dt} > c$ și deci pentru aplicarea lui II nu mai sînt necesare alte condiții. În punctul K, această frontieră intersectează unda de șoc reflectată în punctul C de suprafața de lovire. Frontiera $P - U$ ia aici forma frontului undei de descărcare, pe care avem discontinuități ale tensiunilor, iar $\frac{dx}{dt} = c_0$ de-a lungul lui KJ. Cu ajutorul soluției din domeniul P, combinată cu teorema cantității de mișcare și cu valorile caracteristice de-a lungul caracteristicei KJ pe frontiera domeniului U, se determină mărimea saltului de-a lungul frontului undei de descărcare de șoc. Această undă este absorbită complet în punctul J. Apoi de-a lungul frontierei JG, $\frac{dx}{dt} < c_0$. Deci ultima porțiune a frontierei care mărginește domeniul plastic se determină cu ajutorul a două caracteristice din P și una din U.

Se arată că ulterior limita de elasticitate nu mai este atinsă în nici o secțiune și domeniul U acoperă întreaga bară. În bară, de acum încolo, se vor propaga numai unde elastice.

Distribuția deformațiilor plastice este reprezentată în fig. 29. Curba $ABCGEF$ din această figură caracterizează deformațiile plastice produse de undele directe înainte de întîlnirea cu unda reflectată AC (fig. 28). Curgerea plastică ulterioară produsă de al doilea domeniu plastic provoacă deformațiile plastice suplimentare $CGED$. După cum rezultă din fig. 29 aceste deformații sînt mici în comparație cu cele produse de unda plastică primară. Cele mai mari deformații se concentrează în apropierea locului lovirii, astfel că pentru mari viteze de lovire și deci pentru mari deformații, capătul barei se poate deforma în formă de ciupercă.

Studierea soluției arată că este necesară o analiză amănunțită pentru determinarea frontului celui de al doilea domeniu de deformații plastice. Ea arată de asemenea că pentru mari viteze de încărcare, sînt necesare calcule foarte îndelungate. De asemenea este

Scanned with OKEN Scanner

necesară şi o mare precizie de calcul pentru determinarea punctelor de pe frontiere, în special a acelora de pe segmentele unde se foloseşte condiţia $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\sigma}{dv}$, pentru că în aceste calcule intervin diferenţe foarte mici.

Punerea în evidenţă a celui de al doilea domeniu plastic, precum şi toate consideraţiile de mai sus, aparţin lui *E. H. Lee* [114].

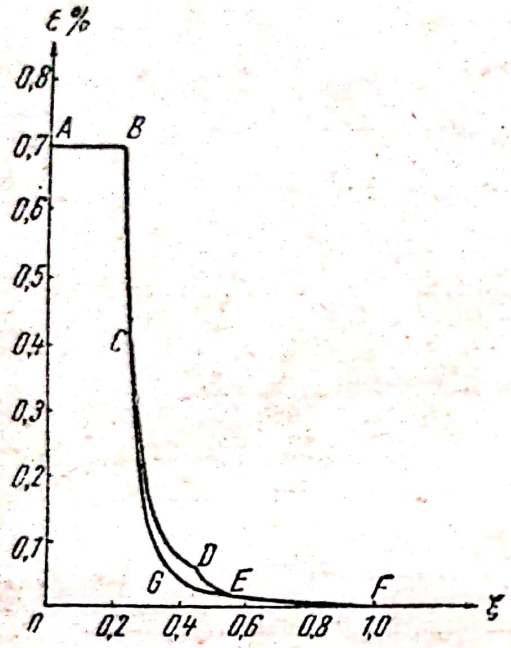

Fig. 29

e) Dacă presiunea la capătul barei este foarte mare, prin reflectarea undelor de capătul liber şi deci prin suprapunerea efectului undelor reflectate peste cele directe pot să apară crăpături în bară sau chiar se poate întîmpla ca bara să se rupă în mai multe bucăţi. Această problemă a fost considerată încă de *B. Hopkinson* [84]. El a făcut experienţe cu ajutorul unor plăci subţiri şi groase de oţel. Încărcarea se produce cu ajutorul unui detonator pus pe una din suprafeţele plăcii. Prin explozie, la plăcile subţiri se produce o gaură străpunsă, iar la plăcile groase se formează aşchii (englezeşte: scabs; ruseşte отколы) de formă aproximativ sferică. Metodele experimentale propuse de *B. Hopkinson* sînt, sub formă mai perfecţionată, utilizate şi astăzi. Lucrările lui au stat la baza multor lucrări experimentale (vezi de exemplu [105] şi [53]).

Kolsky şi colaboratorii săi [105] au studiat experimental problema formării crăpăturilor şi ruperilor în epruvete de diferite forme. Undele erau produse de un detonator lipit pe suprafaţa superioară a epruvetei. Epruvetele au fost făcute din materiale transparente (materiale plastice şi sticlă) pentru a se putea observa mai bine crăpăturile interioare. Se studiază posibilitatea distrugerii epruvetei, datorită suprapunerii efectelor undelor reflectate de către suprafeţele laterale şi a undelor reflectate de suprafaţa inferioară a epruvetei. În particular, se consideră cazul epruvetei conice; explozibilul este aşezat în centrul bazei conului. În aceste epruvete se observă, după explozie, existenţa unor « băşicuţe » similare cu cele din lichide. Fenomenul se aseamănă mai mult cu formarea unei cavităţi într-un lichid, decît cu distrugerea unui solid.

H. Kolsky arată că dacă încărcarea este de foarte scurtă durată, în epruvetă apar foarte multe fisuri, care nu au timp să se propage. În acest caz, suprafeţele de rupere sînt foarte neregulate, căci ele sînt rezultatul a foarte multe reflectări de unde (ele depind deci de viteza de propagare în materialul respectiv, şi de dimensiunile epruvetei). Dacă timpul de încărcare este mai lung, fisurile au timp să se propage (pot ajunge pînă la cîţiva centimetri), iar eventualele suprafeţe de rupere sînt din această cauză mult mai netede. Încărcările dinamice de lungă durată seamănă din acest punct de vedere cu încărcările statice.

O problemă similară, de formare de crăpături şi aşchii, datorită tot reflectării undelor, a fost considerată de *J. Rinehart* [186], [187], [185]. Epruvetele considerate erau plăci groase, iar undele de compresiune erau produse de un explozibil de formă cilindrică, aşezat pe aceste plăci. Aceste unde de compresiune, ajungînd la cea de a doua suprafaţă a plăcii se reflectă ca unde de întindere. La o anumită distanţă de această suprafaţă, tensiunea de întindere pe această undă atinge valoarea tensiunii critice de distrugere. Acolo se produc crăpăturile sau chiar ruperea. Experienţele au fost făcute cu plăci de aluminiu, aramă, oţel şi alamă. Se studiază marile deformaţii plastice ce apar; se arată că se modifică microstructura metalului respectiv. O descriere a unor asemenea tipuri de experienţe utilizînd numai ecuaţiile elasticităţii, a fost făcută de *W. A. Allen* şi *W. Goldsmith* [245], [246], pentru cazul cînd placa este de oţel.

Aceeaşi problemă pentru tuburi groase de oţel, cînd în interiorul lor se produce o explozie, a fost examinată de *J. Pearson* şi *J. Rinehart* [158]. Presiunea maximă atinsă prin explozie era de 280 000 kg/cm². Cazul tuburilor groase, încărcate nesimetric, cu ajutorul unei explozii interioare, a fost considerat tot de *J. Rinehart* şi *J. Pearson* [189]. Epruvetele erau de data aceasta din oţel, aramă, alamă, aluminiu şi plumb. Se arată experimental că în acest caz se formează şi o schijă conică.

Dacă epruvetele sînt monocristaline, ele reacţionează diferit la detonaţii. *J. Rinehart* [188] făcînd experienţe pe tuburi de aluminiu pur, a arătat că deformaţiile nu mai sînt uniforme. În acest caz deformaţiile depind de orientarea tensiunilor în raport cu sistemul cristalografic respectiv şi de sistemul de alunecare asociat. (Pentru plasticitatea cristalelor vezi bibliografia indicată în [188].)

Cazul barelor de oţel, cupru, aluminiu, plumb, alamă etc., a fost considerat de *Broberg* [25]. Undele longitudinale ce se propagau în bară erau datorite unei explozii. Teoria care este aplicată este cea a lui *Pack*, *Evans* şi *James* pentru mari presiuni. Se pune în evidenţă şi experimental că în apropierea celui de al doilea capăt

Scanned with OKEN Scanner

al barei, care este liber, datorită suprapunerii undelor reflectate de şoc peste cele directe, bara se rupe în aşchii.

O foarte interesantă metodă experimentală de măsurare a tensiunilor dinamice într-un proiectil, în timpul pătrunderii lui într-o placă de blindaj, a fost dată de *J. I. Blum* [23]. Se consideră diferite viteze de impact, plăci de diferite grosimi şi diferite unghiuri de lovire.

§ 3. UNDA REFLECTATĂ DE DESCĂRCARE (cazul materialelor cu $\sigma \sim \varepsilon$ Concav)

În cele ce urmează, vom cerceta influenţa undei reflectate de descărcare, asupra propagării undelor directe elastice şi plastice, cînd curba $\sigma \sim \varepsilon$ are concavitatea dirijată spre axa tensiunilor. După cum am arătat în Cap. III, în acest caz vor interveni unde de şoc.

Vom expune mai jos rezultatele obţinute de *E. H. Lee* şi *S. Tupper* [121] care s-au referit în special la bare de oţel cu conţinut de crom şi nichel. După cum am mai arătat, pentru acest material, porţiunea plastică a curbei $\sigma \sim \varepsilon$ are concavitatea dirijată spre axa tensiunilor (fig. 21). Întrucît pentru aliaje foarte dure de oţel. limita de elasticitate variază puţin cu viteza de deformare, influenţa acestei viteze asupra curbei $\sigma \sim \varepsilon$ a fost neglijată. În diagrama $\sigma \sim \varepsilon$, tensiunea, care este o tensiune de compresiune, a fost raportată la secţiunea iniţială (tensiune relativă).

Din cauza apariţiei undelor de şoc, tabloul propagării este aproximat de autorii de mai sus prin două unde de şoc. Prima este obişnuita undă elastică de amplitudine $\sigma_s = \sigma_A$ (fig. 21), iar cea de a doua este o undă de şoc plastică de amplitudine $\sigma_B - \sigma_A$ ce se propagă cu o viteză corespunzătoare unghiului de înclinare al coardei AB. Punctul B corespunde tensiunii maxime obţinute prin lovire. Viteza corespunzătoare, adică viteza de lovire, se obţine din (3.28). Obţinem

$$v_B = \frac{\sigma_A}{\rho c_0} + \frac{\sigma_B - \sigma_A}{\rho c_{AB}} \tag{4.19}$$

unde c_{AB} se determină din (3.27), unde în locul lui $\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$ este introdusă valoarea tangentei unghiului de înclinare al coardei AB.

Autorii de mai sus au făcut unele presupuneri simplificatoare, care nu influenţează prea mult rezultatele pentru viteze medii. Pe frontul undei de şoc, pentru viteze foarte mari de deformare, se presupune că este aplicabilă curba izotermică statică $\sigma \sim \varepsilon$. Pe de altă parte, din relaţiile Rankine-Hugoniot, sînt alese primele două,

care exprimă conservarea masei și a cantității de mișcare. Considerații energetice arată că pe frontul undei de șoc se produce o emitere de exces de energie termică. Acest exces corespunde unui lucru mecanic reprezentat în fig. 21 de aria cuprinsă între curba $\sigma \sim \varepsilon$ și coarda AB. De aceea temperatura materialului va fi mai mare decît pentru condiții adiabatice. Din fig. 21 se vede că pentru tensiuni moderate, acest exces este redus. Într-al treilea rînd se consideră numai ecuațiile pentru mișcarea longitudinală. Deformațiile transversale dau și ele forțe de inerție care vor influența asupra propagării undelor de tensiune. Este clar însă că discontinuitățile deformațiilor transversale, corespunzătoare discontinuităților tensiunii, nu sînt admisibile, pentru că conduc la accelerații transversale infinite. Totuși pentru că deplasările transversale sînt mici în comparație cu cele longitudinale, teoria aplicată permite să se evalueze just mărimea deformațiilor. În al patrulea rînd se presupune că nu are loc o pierdere a stabilității. Această presupunere este realizată și în realitate, întrucît într-un interval mic de acțiune al forțelor de compresiune, inerția materialului împiedică bombarea laterală, deși mărimea instantanee a acestor forțe este foarte mare. În experiențele făcute nu s-au observat bombări.

a) Să vedem acum care este influența undei reflectate de descărcare, asupra undelor directe. Ca și pînă acum vom considera că unda reflectată se propagă cu viteza constantă c_0, descărcarea făcîndu-se după segmentul BD din fig. 21. Se neglijează deci efectul de histerezis și faptul că această viteză ar trebui considerată variabilă.

În fig. 30 este reprezentat caracterul intersecției undelor de tensiune. Fig. 30, *a* reprezintă propagarea fronturilor undelor în planul (x, t), în care $\tau = c_0 t$. OD reprezintă unda plastică de șoc inițială ce se mișcă în sens direct. Înaintea ei materialul se găsește la limita de elasticitate σ_A, ca rezultat al trecerii undei elastice. Vitezele v_A și v_B se determină din soluțiile pe unda directă. Domeniul DOE se găsește în condițiile corespunzătoare punctului B, de pe curba $\sigma \sim \varepsilon$ din fig. 30, *b*. HO reprezintă unda elastică reflectată de capătul liber al barei. Tensiunea în spatele ei este nulă iar vitezele particulelor se dublează în comparație cu vitezele particulelor din fața ei. Aceste valori se obțin din relația (3.28) scrisă sub forma

$$\Delta (\rho c_0 v) = \frac{1}{c'} \Delta \sigma \qquad (4.20)$$

cu $c' = \frac{dx}{d\tau} = \frac{c}{c_0}$, care pentru fiecare front de undă are valoarea scrisă pe fronturile lor (fig. 30, *a*). Pe fig. 30, *b*, este indicată distribuția tensiunilor în momentul de timp $\tau = \tau_1$, cînd undele nu s-au întîlnit

Scanned with OKEN Scanner

încă. Pe fig. 30, *d*, este reprezentată distribuția tensiunilor în momentul $\tau = \tau_2$, cînd undele se întîlnesc. Fronturile undelor care rezultă se obțin prin metoda aproximațiilor succesive, folosind relația

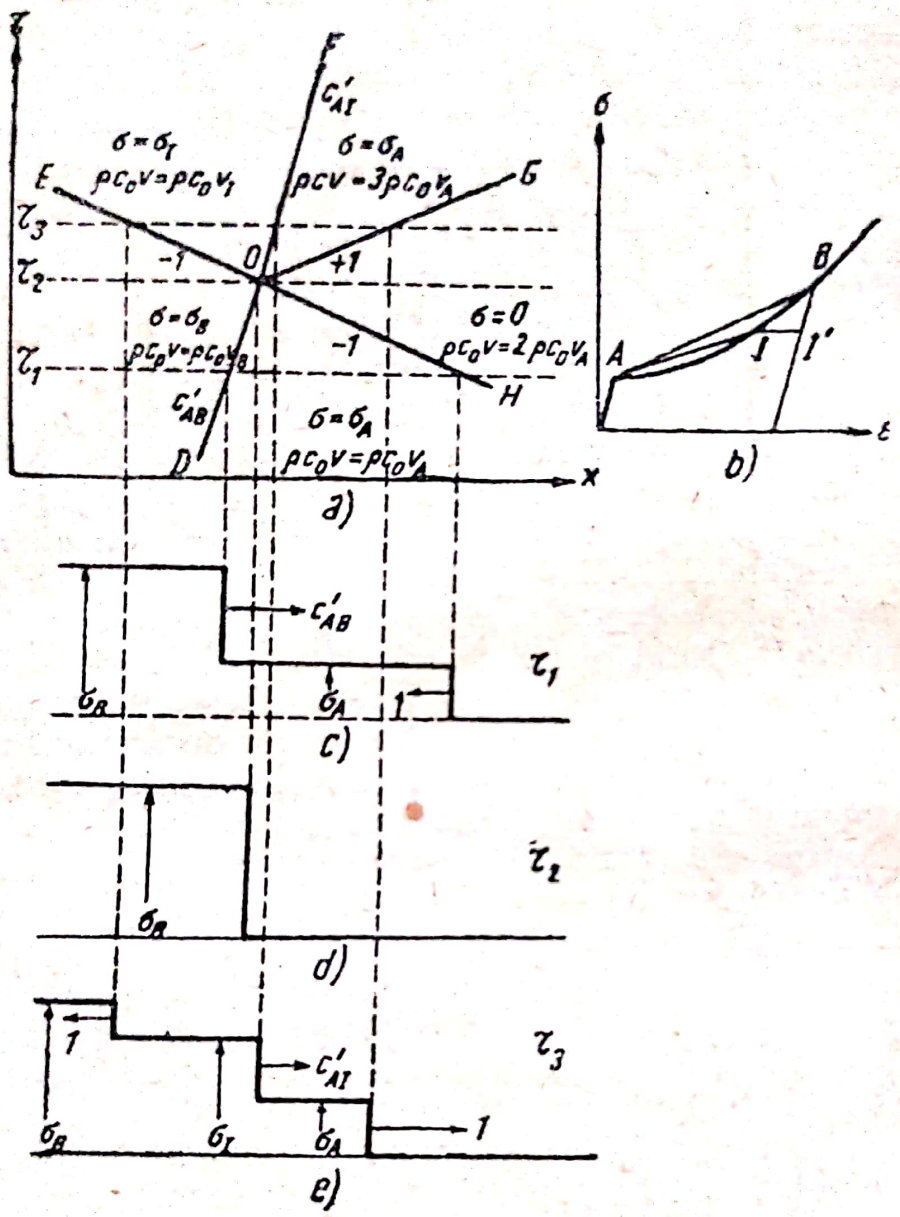

Fig. 30

(4.20). Dacă σ_B este suficient de mare, atunci de la punctul *O* se va propaga unda elastică *OG*, după trecerea căreia materialul rămîne în starea corespunzătoare punctului *A* din fig. 30, *b*, viteza particulelor fiind de trei ori mai mare decît pe prima undă elastică. În afară de unda elastică, din punctul *O* se va propaga unda plastică de șoc *OF* care mărește tensiunea pînă la valoarea σ_I corespunzătoare punctului *I* de pe curba $\sigma \sim \varepsilon$. Prin materialul situat la stînga punctului *O* și în care tensiunea este σ_B, trece unda de descărcare care

scade tensiunea pînă la valoarea σ_I corespunzătoare punctului I' de pe fig. 30, *b*, situat pe linia de descărcare care trece prin punctul *B*. Mărimea tensiunii σ_I se obţine din condiţia de egalitate a vitezelor particulelor în domeniul *EOF*, obţinute prin aplicarea relaţiei (4.20) la traversarea liniei *OF*. Această condiţie se scrie

$$\rho c_0 v_B + (-1)(\sigma_I - \sigma_B) = 3\rho c_0 v_A + \frac{1}{c'_{AI}}(\sigma_I - \sigma_A). \quad (4.21)$$

Mărimea c'_{AI} se determină din relaţia (3.27) şi se exprimă în funcţie de mărimea unghiului de înclinare al coardei *AI* din fig. 30, *b*. În felul acesta tensiunea σ_I se determină prin metoda aproximaţiilor succesive, care converge bine pentru că c' variază puţin cu variaţia tensiunii.

În fig. 30, *e* este reprezentată distribuţia tensiunilor în momentul $\tau = \tau_3$. Unda de descărcare *OH* trece prin frontul undei plastice, deşi prin aceasta îşi micşorează întrucîtva intensitatea. Amplitudinea undei plastice de şoc scade de asemenea.

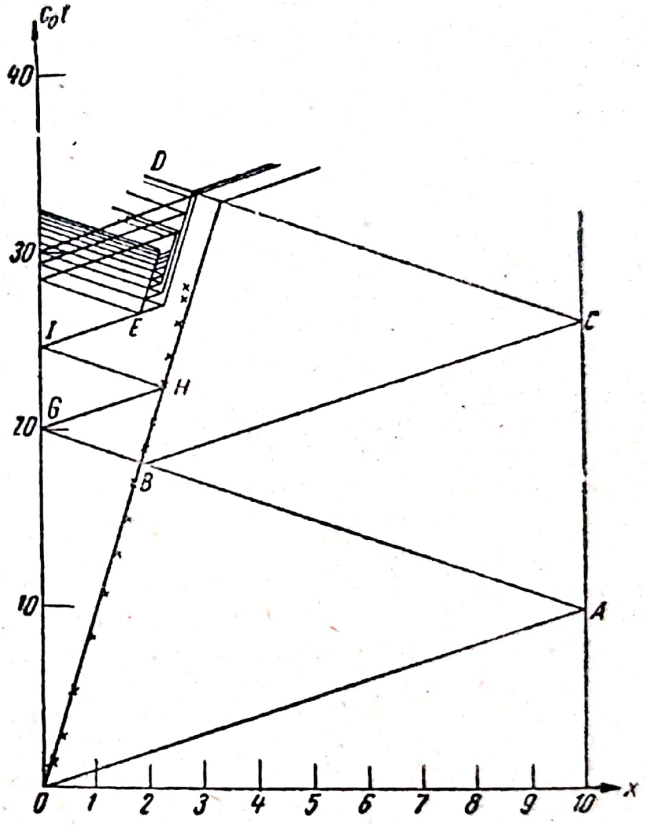

Fig. 31

Într-un mod analog se poate studia complet procesul propagării deformaţiilor plastice, atît timp cît epruveta nu se depărtează de placa lovită. Tensiunile maxime care acţionează în fiecare secţiune a epruvetei determină mărimea deformaţiilor plastice ale căror valori finale se pot obţine.

b) Consideraţiile de mai sus au fost aplicate de *E. H. Lee* şi *S. J. Tupper* la studiul propagării undelor în bare de oţel cu conţinut de crom şi nichel, lovite de un perete rigid, viteza de lovire fiind de 146,6 m/s şi 285 m/s. Primul caz corespunde deformaţiei maxime egale cu 0,2 iar cel de al doilea cu 0,4.

În fig. 31 este reprezentată propagarea undelor în planul (x,τ) pentru viteza de 146,6 m/s. *OA* este unda elastică iniţială şi *OB* este frontul undelor de şoc plastice. Mărimea tensiunii relative după

trecerea frontului OB, adică tensiunea maximă este egală cu 22 205,8 kg/cm². Din punctul B către capătul liber al barei se propagă frontul undei elastice BC.

Începînd din punctul E în spatele frontului undei plastice principale, se formează un domeniu plastic. Apariţia sa este rezultatul reflectării undei de descărcare AB de suprafaţa lovită. Linia BG reprezintă unda de descărcare care, reflectîndu-se de capătul lovit (unde vitezele sînt aceleaşi ca la un capăt fix), dă o descărcare suplimentară de-a lungul lui GH. Totuşi intensitatea sa este insuficientă pentru a trece prin unda plastică principală în punctul H. De aceea

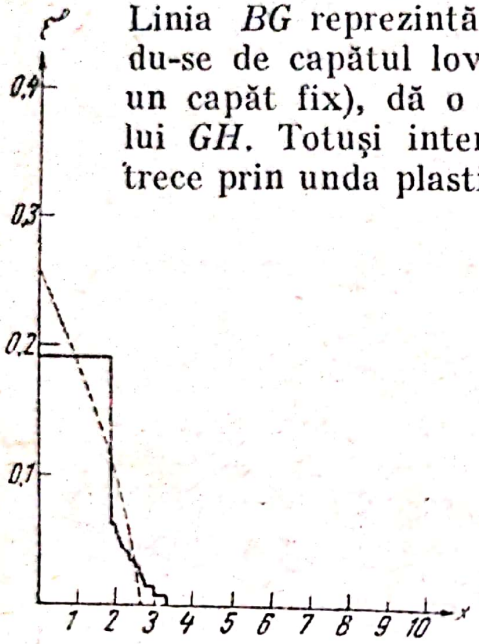

Fig. 32

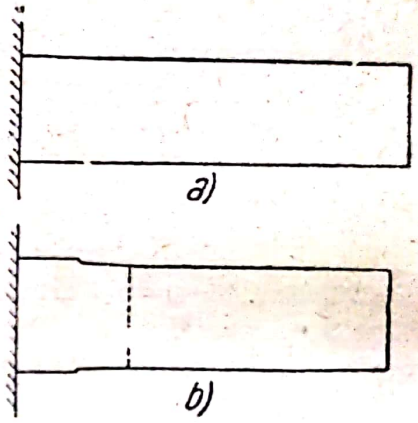

Fig. 33

ea se reflectă sub forma undei de încărcare HI şi în acelaşi timp micşorează intensitatea undei plastice principale. Unda de încărcare se întăreşte prin reflectarea de suprafaţa de lovire I şi se va propaga sub forma undei de încărcare IE. Tensiunea în spatele frontului acestei unde este mai mică decît cea din spatele primei unde plastice OB, dar mai mare decît cea din spatele undei plastice BH. În felul acesta în punctul E, care are aceeaşi abscisă ca şi punctul B, unda se află într-un domeniu în care noua limită de elasticitate, modificată de unda plastică precedentă, este mai mică decît amplitudinea undei de tensiune. Deci în acest punct va apare o nouă undă plastică. Ca rezultat al discontinuităţii amintite în mărimea limitei de elasticitate, vor apare de asemenea două unde elastice care se propagă din punctul E. În mod asemănător apar undele dintre E şi F în fig. 31.

Prin reflectarea celei de a doua unde elastice în punctul C deformaţiile plastice nu se mai propagă şi în bară rămîn numai vibraţii elastice. Mai departe nu mai apar nici un fel de deformaţii plastice

Distribuţia corespunzătoare a deformaţiilor plastice este reprezentată în fig. 32 prin linia continuă. În acest caz predomină deformaţia de la unda plastică iniţială. În fig. 33, *a* este reprezentată forma nedeformată a epruvetei iar în fig. 33, *b* forma sa finală.

Grafice similare au fost construite şi pentru viteza de lovire de 285 m/s. În acest caz unda elastică iniţială se reflectă de trei ori de capătul liber al barei înainte ca deformaţiile plastice să fie complet absorbite. Întrucît în spatele frontului undei plastice iniţiale apar în acest caz două alte regiuni plastice, deformaţiile plastice datorite primei unde plastice nu mai sînt aşa de predominante.

În afara soluţiei elasto-plastice de mai sus, autorii au utilizat şi soluţia plastic-rigidă (vezi cap. I, § 9). Utilizarea în calitate de variabilă independentă a lungimii x a porţiunii de bară neperturbată duce la posibilitatea comparării cu soluţia elasto-plastică exprimată în coordonate Lagrange. Propagarea frontului undei plastice, calculată cu această soluţie, este reprezentată prin cruciuliţe în fig. 31 şi punctat în fig. 32.

După cum era de aşteptat, această soluţie egalizează şi mediază discontinuităţile date de soluţia precedentă. Presupunerea că corpul este absolut rigid înseamnă că viteza undelor elastice este infinită şi că aceste unde se reflectă de o infinitate de ori de capătul liber. Cu cît reflectările în prima soluţie sînt mai multe, cu atît cele două soluţii coincid mai bine. De asemenea coincid bine cele două unde plastice principale, corespunzătoare celor două soluţii. Nu ne putem aştepta la o coincidenţă bună în cazul în care curgerea plastică încetează, pentru că în soluţia elasto-plastică, datorită încetării curgerii, numărul reflectărilor undelor elastice este limitat. În soluţia plastic-rigidă, curgerea plastică variază continuu cu viteza de lovire, în timp ce pentru soluţia elasto-plastică ea creşte în trepte în legătură cu numărul reflectărilor undelor elastice.

Limitele între care cele două metode coincid bine sînt legate de mărimea deformaţiei plastice, care în cazul vitezelor considerate este de 20% şi 40%. Cea mai mare deformaţie elastică reprezintă aproximativ 1% şi de aceea ea are o influenţă relativ mică asupra întregului proces. Pentru valori mult mai mici ale vitezei, neconcordanţa dintre cele două tipuri de soluţii devine însemnată şi este preferabil să considerăm materialul ca elasto-plastic. Cînd viteza de lovire tinde către zero, soluţia bazată pe presupunerea corpului plastic-rigid determină totuşi curgerea plastică, dar sub o anumită limită apar numai deformaţii elastice. După cum arată fig. 34, soluţia plastic-rigidă (*b*) dă o comprimare mai pronunţată, pentru că întreaga energie de lovire se transformă în deformaţii plastice, pe cînd în soluţia elasto-plastică (*c*) o parte din ea se transformă în ener-

Scanned with OKEN Scanner

gia cinetică de salt, iar o parte, în oscilații elastice ce rămîn în cilindru. Dacă energia totală este mare în comparație cu energia elastică pe care o posedă cilindrul, soluția plastic-rigidă este satisfăcătoare. Vitezele cu care s-au făcut experiențele au fost luate în intervalul de concordanță al rezultatelor celor două soluții.

În sprijinul teoriei au fost făcute o serie de experiențe de către *Whiffin* și *Pugh*. Au fost folosite epruvete din aliaje de oțel (cu crom și nichel) de diametru de 8,6 mm și lungime de 12,7 mm. Ele au fost introduse într-un revolver și trase asupra unei plăci călite

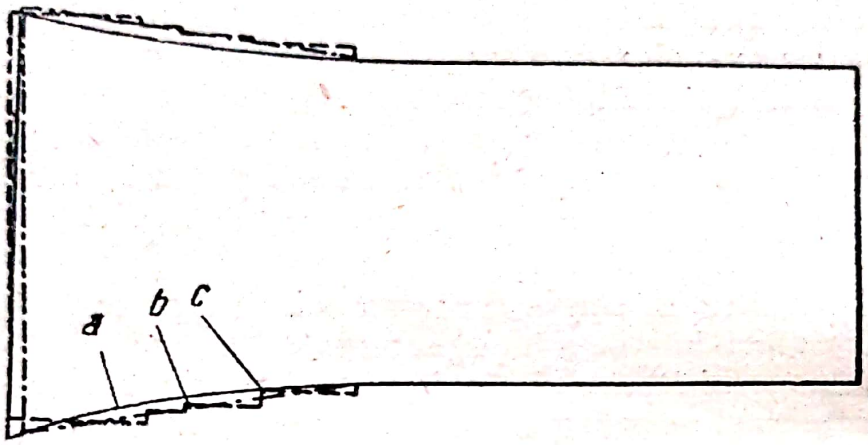

Fig. 34

de blindaj. În fig. 34 sînt comparate deformațiile plastice obținute experimental pentru viteza de lovire de 279,2 m/s (curba *a*), cu cele calculate folosind viteza de 285 m/s (curbele *b* și *c*). Variația lungimii epruvetei pentru cele două soluții este neglijabilă. După cum se vede din figură, experimental nu s-a putut obține o lovire perfect normală, dar asta nu a influențat prea mult distribuția deformațiilor.

Pe baza celor de mai sus, *Lee* și *Tupper* trag concluzia că pentru aliaje dure de oțel, lovirea cu viteze de ordinul de 300 m/s poate fi studiată pe baza relației statice tensiune-deformație. Teoria unidimensională dă rezultate satisfăcătoare chiar pentru epruvete cu raportul dintre lungime și diametru de 2:1, dacă se ia o curbă netedă care să treacă prin curba în trepte a distribuției deformațiilor plastice. Pentru deformații plastice mari în comparație cu deformațiile elastice cercetarea bazată pe presupunerea că corpul este plastic-rigid reprezintă o metodă analitică simplă care este satisfăcătoare.

Pentru o mai bună reprezentare a fenomenului, *M. P. White* [238] a propus să se combine cele două metode de mai sus: la înce-

Scanned with OKEN Scanner

putul procesului de lovire materialul să fie considerat elasto-plastic, iar apoi plastic rigid. Dificultăţile de calcul care intervin în acest fel nu sînt mari.

c) Un tabolu de propagare similar cu cel din fig. 31 a fost utilizat de *Kalman DeJuhasz* [97] pentru bare de cupru recopt, lungi de aproximativ 1,64 m, lovite cu o viteză de 3,82 m/s, timp de 0,00235 s. Se presupune ca şi mai sus că graficul propagării se poate obţine utilizînd numai două unde de şoc, una elastică şi una plastică. Cea elastică se reflectă tot numai de două ori de capătul liber al barei. Analiza grafică, care este dată, utilizează numai ecuaţiile undelor de şoc.

Kalman DeJuhasz a considerat şi problema lovirii unei bare, cu al doilea capăt fixat rigid. Bara, lungă de aproximativ 40 cm, a fost considerată tot din cupru. Viteza de impact este de 2,74 m/s, iar timpul de impact de 0,001 s. În acest caz, prima undă elastică de şoc, ajunsă la al doilea capăt al barei (care de data aceasta este fix) se reflectă ca undă plastică. Din acest moment şi pînă la încetarea lovirii (cînd unul din capete devine liber) în bară se vor propaga două unde plastice, care se pot reflecta de mai multe ori. În momentul în care unul din capete devine liber, de la acest capăt porneşte o undă elastică de şoc de descărcare.

§ 4. ALTE LUCRĂRI

a) Problema lovirii barelor finite de un perete rigid a fost considerată şi de *Lenski* [124]. El consideră că materialul barei este consolidabil liniar, avînd densitatea constantă. Se studiază, considerînd mai multe viteze de lovire, propagarea undelor de şoc elastice şi plastice, pînă în momentul în care bara se desprinde de peretele lovit. Să arătăm cum găseşte *Lenski* viteza cu care bara se desprinde de peretele rigid. Vom folosi demonstraţia puţin modificată a lui *Rahmatulin* [180]. Bara se presupune de lungime $2l$.

Inversînd problema vom presupune că placa loveşte bara. Această problemă coincide cu problema propagării undelor într-o bară lovită la un capăt cu viteză constantă. În fig. 35 este reprezentat tabloul propagării undelor. În domeniul OAB se propagă unde Riemann. Pe ele

$$\frac{x}{t} = c(u_x), \quad u_t = -\int_0^{u_x} c(u_x)\, du_x. \tag{4.22}$$

Scanned with OKEN Scanner

În domeniul ABC ecuația diferențială de mișcare este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} [E\varepsilon_2 - \sigma_2] \tag{4.23}$$

unde ε_2 și σ_2 sînt valorile absolute ale deformației și tensiunii pe undele lui Riemann în punctele caracteristicei AB, care este unda de descărcare și de șoc. În afară de aceasta, pe ea ecuațiile cantității de mișcare și a continuității deplasării coincid. Prin urmare, derivînd deplasarea de-a lungul undei de descărcare, obținem

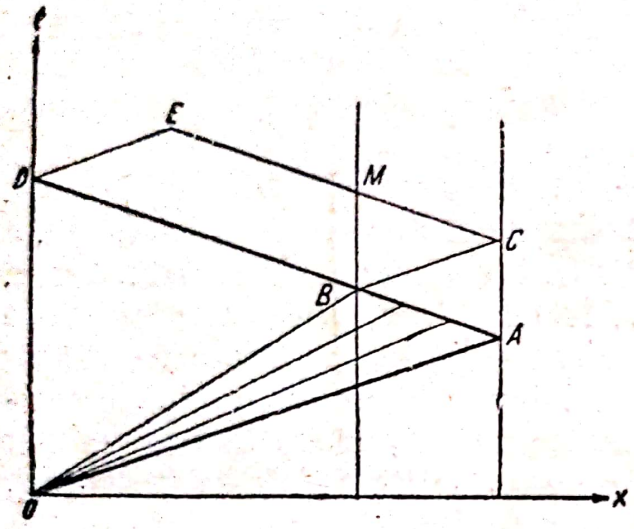

Fig. 35

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = v_2 + c_0 \varepsilon_2 . \tag{4.24}$$

Ecuația (4.23) admite soluția

$$u = F_1(c_0 t - x) + F_2(c_0 t + x) + f(x), \tag{4.25}$$

unde

$$f(x) = \frac{1}{c_0^2 \rho_0} \int_0^x (\sigma_2 - E\varepsilon_2)\, dx. \tag{4.26}$$

Introducînd (4.25) în (4.24) obținem

$$c_0 F_1' + c_0 F_2' + c_0 F_1' - c_0 F_2' - \frac{1}{c_0 \rho_0} (\sigma_2 - E\varepsilon_2) = v_2 + c_0 \varepsilon_2$$

de unde

$$F_1'(2l - 2x) = \frac{v_2}{2c_0} + \frac{\sigma_2}{2E} = f_1(x). \tag{4.27}$$

Pentru $x = l$, datorită faptului că la capătul liber nu avem deformații remanente, obținem $u_x = 0$. Deci din (4.25) rezultă

$$-F_1'(c_0 t - l) + F_2'(c_0 t + l) + \frac{\sigma_2 - E\varepsilon_2}{E} = 0.$$

Dar pentru că $\sigma_2 = E\varepsilon_s$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_s$ pentru $x = l$ obținem

$$F_2'(c_0 t + l) = F_1'(c_0 t - l). \tag{4.28}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (4.27) și (4.28) obținem

$$F_1'(z) = f\left(l - \frac{z}{2}\right), \quad F_2'(z) = F_1'(z - 2l) = f_1\left(2l - \frac{z}{2}\right). \quad (4.29)$$

Expresiile pentru deplasări în domeniile BMC și $BMED$ sînt

$$\begin{aligned} u &= \Phi_1(c_0t - x) + \Phi_2(c_0t + x) + f(x), \\ u &= \Phi_3(c_0t - x) + \Phi_4(c_0t + x). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Notînd cu ε_m deformația maximă, din condiții analoge cu (4.24) obținem

$$\Phi_3'(2l - 2x) = \frac{v_0 + c_0\varepsilon_m}{2c_0} \quad (4.31)$$

de unde rezultă că $\Phi_3'(z)$ este constant de-a lungul lui BD, cînd $2l - 2x_0 \leqslant z \leqslant 2l$.

Din condiția continuității deplasării pe BC, avem

$$u_t + c_0u_x = \frac{\partial}{\partial t}[F_1(c_0t - x) + F_2(c_0t + x) + f] + \\ + c_0\frac{\partial}{\partial x}[F_1(c_0t - x) + F_2(c_0t + x) + f].$$

Pentru că în (4.25) și (4.30) intră unul și același termen $f(x)$, obținem

$$\Phi_2'(K + 2x) = F_2'(K + 2x). \quad (4.32)$$

Să folosim acum condiția de pe BM. Pentru $x = x_0$

$$\Phi_1'(c_0t - x_0) + \Phi_2'(c_0t + x_0) = \Phi_3'(c_0t - x_0) + \Phi_4'(c_0t + x_0)$$

$$\Phi_2'(c_0t + x_0) - \Phi_1'(c_0t - x_0) + \frac{\sigma_2 - E\varepsilon_2}{c_0^2\rho_0} = \Phi_4'(c_0t + x_0) - \Phi_3'(c_0t - x_0).$$

De aici obținem

$$\Phi_4'(c_0t + x_0) = \Phi_2'(c_0t + x_0) + \frac{\sigma_m - E\varepsilon_m}{2c_0^2\rho_0}.$$

Dar este suficient să cunoaștem pe Φ_3' și Φ_4' de-a lungul lui $c_0t + x = 2l$. Obținem

$$\Phi_4'(2l) = F_2'(2l) + \frac{\sigma_m - E\varepsilon_m}{2c_0^2\rho_0} = f(l) + \frac{\sigma_m - E\varepsilon_m}{2c_0^2\rho_0} = \text{const}. \quad (4.33)$$

Din (4.31) rezultă că

$$\Phi_3'(2l - 2x) = \frac{v_0 + c_0\varepsilon_m}{2c_0} = \text{const}. \quad (4.34)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar pentru că din (4.27), $f(l) = \frac{c_0\varepsilon_s}{2c_0} + \frac{E\varepsilon_s}{2E} = \varepsilon_s$, obţinem

$$\Phi_4(2l) = \varepsilon_s - \frac{\varepsilon_m}{2} + \frac{\sigma_m}{2c_0^2\rho_0}. \tag{4.35}$$

Să deducem acum condiţia de reflectare. Să notăm viteza în punctul D din domeniul $BMED$ cu v_1, iar tensiunea cu σ_1. Dacă viteza capătului barei după dezlipirea de placă se notează cu v_3, teorema cantităţii de mişcare dă

$$v_3 = v_1 - \frac{\sigma_1}{\rho c_0}.$$

Condiţia de dezlipire va fi evident

$$v_1 - \frac{\sigma_1}{\rho c_0} > v_0. \tag{4.36}$$

Utilizînd formulele (4.35) şi (4.34), obţinem

$$v_s = 2c_0\varepsilon_s. \tag{4.37}$$

Prin urmare condiţia care asigură desprinderea barei, după prima reflectare a undei de descărcare de capătul lovit al barei, va fi

$$v_0 \leqslant 2c_0\varepsilon_s. \tag{4.38}$$

Pentru obţinerea relaţiei (4.38), *Lenski* a utilizat teoria propagării undelor de şoc. El a examinat şi cazul cînd v_0 nu satisface acestei relaţii, adică cazul cînd dezlipirea are loc la a doua reflectare.

b) Problema cercetată de *Lenski* a fost reluată de *Hans Richter* [183]. El consideră că pentru probleme dinamice, schema lui Prandtl nu poate fi utilizată. Pentru cercetarea problemei el presupune că materialul este lipsit de consolidare, dar se poate relaxa la încărcare dinamică. Aceasta provoacă o slăbire a intensităţii undei de şoc. Relaţia dintre tensiune şi deformaţie, în care intervine viscozitatea materialului, este de forma

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} - \frac{1}{E}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right) = \operatorname{sign}\sigma \cdot \max\,(0, |\sigma| - \sigma_s). \tag{4.39}$$

Adăugînd la această relaţie şi ecuaţia de mişcare se obţine un sistem de tip hiperbolic. Se calculează caracteristicele acestui sistem, iar soluţia se dă cu ajutorul funcţiilor Bessel de ordinul zero. Se studiază atît problema lovirii barei semiinfinite cît şi a celei finite. În ambele cazuri se obţine soluţia sub formă întreagă. Este determinată şi relaţia dintre coeficientul de revenire şi durata de reflecţie, lungimea barei şi viteză.

Scanned with OKEN Scanner

c) O altă problemă care a fost cercetată de *R. I. Nadeeva* [150] este aceea a lovirii unei bare elasto-plastice de lungime L cu o bară elastică de lungime l ($l < L$). Secţiunea transversală, modulul de elasticitate, densitatea sînt aceleaşi la cele două bare, însă limita de elasticitate ε_s' a primei bare (de lungime l) este mai mare decît limita de elasticitate ε_s a celei de a doua. Aceasta se poate realiza în practică dacă cele două bare sînt făcute din acelaşi material şi

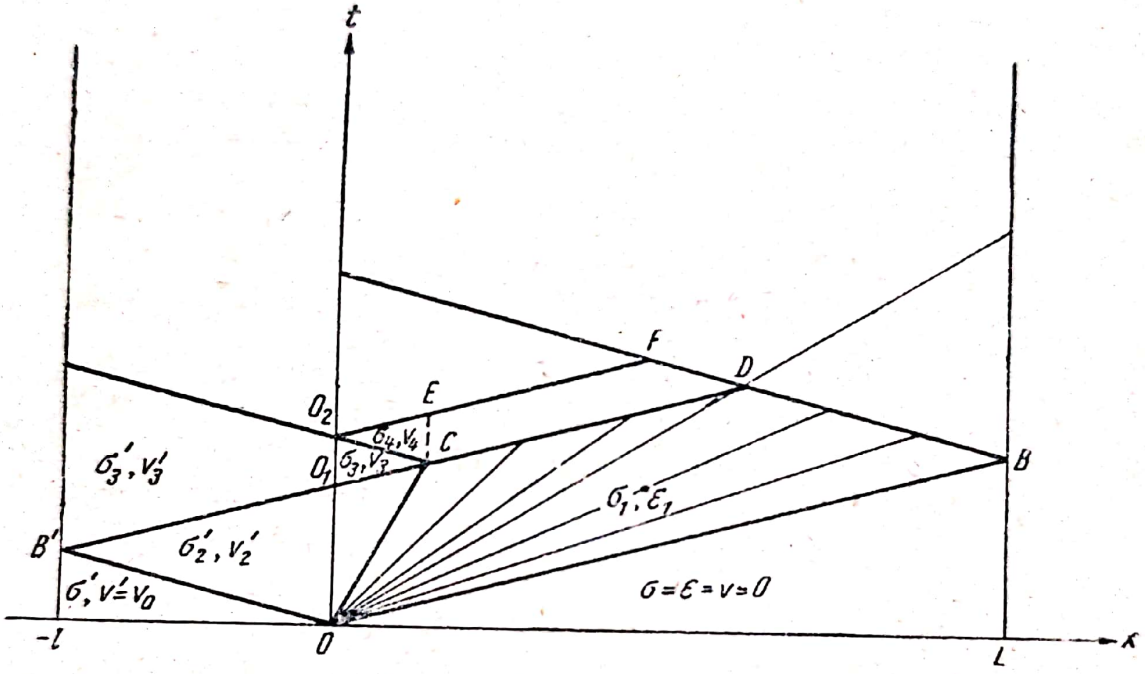

Fig. 36

apoi prima bară se călește. Diagrama $\sigma \sim \varepsilon$ pentru cea de a doua bară se ia sub forma a două segmente de dreaptă (porţiunea elastică şi consolidarea liniară) reunite printr-o curbă cu convexitatea în sus. Drept cazuri particulare se pot considera: cazul consolidării liniare sau cazul unei diagrame curbe.

Nadeeva consideră numai cazul cînd viteza de impact este cuprinsă în intervalul $2c_0\varepsilon_s' > v_0 > 2c_0\varepsilon_s$. În acest caz bara *I* se deformează numai elastic iar bara *II* — elasto-plastic.

Condiţiile iniţiale pentru $t = 0$ sînt: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial u'}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u'}{\partial t} = v_0$, iar condiţiile la limită pentru $t \geqslant 0$ sînt: pentru $x = L$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; pentru $x = -l$, $\frac{\partial u'}{\partial x} = 0$; pentru $x = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u'}{\partial t}$ şi $\sigma = \sigma'$ (indicele «prim» se referă la prima bară). Tabloul propagării undelor este reprezentat în fig. 36. Undele elastice

precum și unda corespunzătoare consolidării liniare sînt considerate unde de șoc. Undele ce corespund porțiunii curbe a diagramei $\sigma \sim \varepsilon$ sînt considerate unde Riemann. Unda de șoc elastică de compresiune OB' se reflectă la capătul liber B' și devine undă elastică de întindere de aceeași intensitate. În punctul O_1 ea trece în bara II și devine undă de descărcare. Ea se întîlnește în punctul D cu unda inversă de descărcare BD. În O_1 unda $B'O_1$ trece în bara II fără nici o modificare, căci materialele au aceeași densitate și același modul de elasticitate.

Utilizînd teorema cantității de mișcare și soluția ecuației undelor în diferitele domenii indicate în fig. 36, autoarea găsește în fiecare din aceste domenii, tensiunile, deformațiile și vitezele corespunzătoare. Pentru diferite viteze de impact, se determină condiția ca undele cu fronturile CD și BD să fie unde de descărcare. Cunoașterea acestor unde de descărcare, deci cunoașterea distribuției deformațiilor plastice, permite să se construiască experimental diagrama dinamică $\sigma \sim \varepsilon$.

Pornind de la problema lovirii celor două bare, *Nadeeva* [151] dă și o metodă de determinare experimentală a diagramei dinamice $\sigma \sim \varepsilon$. Pentru aceasta se pornește de la lucrarea lui *Lenski* [126] care este în prealabil modificată. Între deformația și tensiunea de pe unda de descărcare și deformația plastică a secțiunii respective există relația (1.112)

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_m(x) - \frac{\sigma(\varepsilon_m)}{E}. \tag{4.40}$$

Din ea se obține

$$\frac{d\varepsilon_m}{dx} = \frac{\dfrac{d\tilde{\varepsilon}}{dx}}{1 - \dfrac{c^2}{c_0^2}}. \tag{4.41}$$

Ținînd seama că vitezele de propagare ale celor două unde de descărcare sînt

$$c(\varepsilon_m) = \frac{xc_0}{2L - x} \text{ pentru } x_D \leqslant x \leqslant L \tag{4.42}$$

$$c(\varepsilon_m) = \frac{xc_0}{x + 2l} \text{ pentru } x_C \leqslant x \leqslant x_D, \tag{4.43}$$

prin integrarea relației (4.41) se obține

$$\varepsilon_m(x) = \varepsilon_s + \int_L^{x_D} \frac{\dfrac{d\tilde{\varepsilon}}{dx}}{1 - \left(\dfrac{x}{2L - x}\right)^2} dx + \int_{x_D}^{x} \frac{\dfrac{d\tilde{\varepsilon}}{dx}}{1 - \left(\dfrac{x}{x + 2l}\right)^2} dx. \tag{4.44}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece se presupune că $\tilde{\varepsilon}(x)$ este o funcţie cunoscută, pentru determinarea lui $\varepsilon_m(x)$ mai este necesar să determinăm limita de elasticitate ε_s pentru încărcări dinamice.

Experimental ε_s se poate determina prin găsirea vitezei de lovire v_{os}, pentru care apar deformaţii plastice (mărimea lor este convenţională). Apoi din relaţia $v_{os} = 2c_0\varepsilon_s$, se determină ε_s.

Se poate determina ε_s şi din problema lovirii celor două bare. Viteza v_2 a particulelor din domeniul OO_1C se determină din

$$v_2 = \int_0^{\varepsilon_{max}} c\,(\varepsilon)\,d\varepsilon. \tag{4.45}$$

Viteza v_2' a particulelor din domeniul $OB'O_1$ se determină din ecuaţia cantităţii de mişcare pe frontul undei OB':

$$v_2' = -\frac{\sigma_2'}{c_0\rho} + v_0. \tag{4.46}$$

Însă $v_2 = v_2'$. Din (4.45) şi (4.46) se obţine atunci relaţia pentru determinarea lui ε_s (se presupune că cele două bare au acelaşi modul de elasticitate):

$$2c_0\varepsilon_s = v_0 + c_0\tilde{\varepsilon}_{max} - c_0\int_L^{x_D} \frac{\dfrac{d\tilde{\varepsilon}}{dx}}{1-\left(\dfrac{x}{2L-x}\right)}\,dx -$$

$$-c_0\int_{x_D}^{x_C} \frac{\dfrac{d\tilde{\varepsilon}}{dx}}{1-\left(\dfrac{x}{2l+x}\right)}\,dx. \tag{4.47}$$

După determinarea lui ε_s din (4.47), relaţia (4.44) determină pe $\varepsilon_m(x)$, iar relaţia (4.40) pe $\sigma(\varepsilon_m)$.

Pe baza acestei teorii, *Nadeeva* a construit experimental diagrama dinamică $\sigma \sim \varepsilon$ pentru oţel moale. Ea a folosit epruvete cilindrice de 250 mm lungime şi de 21 mm diametru, pentru barele de tip II şi epruvete de oţel călit de 50 mm lungime şi diametru de 23 mm, pentru barele de tip I. Viteza de lovire a fost de 44—48 m/s. Pentru aceste viteze, în bara mică (de tip I) nu apar deformaţii plastice şi undele reflectate de capetele libere sînt unde de descărcare.

Distribuţia deformaţiilor plastice de-a lungul barei este în deplină concordanţă cu teoria, deşi nu s-a ţinut seama de viteza de deformare, iar teoria utilizată a fost cea unidimensională, adică nu s-a ţinut seama de deplasările transversale ale particulelor.

Scanned with OKEN Scanner

d) *V. G. Ceban* studiază propagarea undelor elasto-plastice ivite prin lovirea unei bare finite de una semiinfinită. Cazul cînd bara finită este rigidă a fost considerat în [30]. În altă lucrare [31], *Ceban* consideră cazul cînd ambele bare sînt deformabile, materialele, formele și dimensiunile secțiunilor transversale ale barelor presupunîndu-se identice. Se consideră că materialul este consolidabil liniar iar descărcarea este considerată elastică. Se utilizează numai teoria propagării undelor de șoc. Pentru diferite viteze de lovire se calculează distribuția tensiunilor și deformațiilor în bară.

Într-o altă lucrare [32], *Ceban* studiază aceeași problemă pentru bare din materiale diferite, totuși ambele fiind consolidabile liniar. Se consideră cazul cînd ambele bare rămîn elastice, cazul cînd bara finită rămîne elastică cealaltă deformîndu-se elasto-plastic și cazul cînd bara finită se deformează elasto-plastic, cea semiinfinită rămînînd elastică.

e) Problema propagării undelor într-o bară finită a fost considerată și de *N. F. Lebedev* [113]. Materialul barei este presupus consolidabil neliniar. Se consideră că bara are limita de elasticitate descrescătoare în direcția propagării undei.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

PROPAGAREA UNDELOR PLASTICE ÎN BARE CU LIMITA DE ELASTICITATE VARIABILĂ

§ 1. PUNEREA PROBLEMEI

Problema propagării undelor plastice în bare cu limita de elasticitate variabilă a fost considerată de *Rahmatulin* [172] încă în 1946. Inițial bara are limita de elasticitate constantă, dar după o lovire la unul din capete, ea devine o bară cu limita de elasticitate variabilă (ea depinde de secțiune). Se presupune evident că prin această lovire bara se deformează plastic. La o a doua lovire trebuie să ținem seama că bara are limita de elasticitate variabilă: descrecătoare dacă lovirea precedentă s-a executat la același capăt, sau crescătoare dacă lovirea precedentă s-a executat la capătul opus al barei.

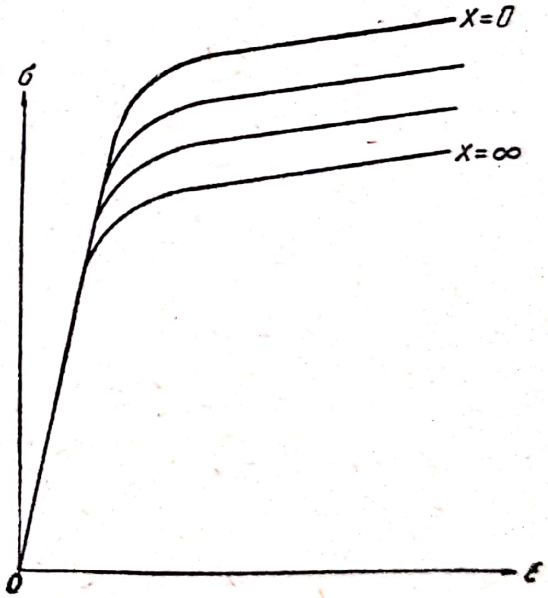

Fig. 37

Vom nota cu $\sigma_s(x)$ limita (variabilă) de elasticitate a secțiunii x. Deformația corespunzătoare va fi

$$\sigma_s(x) = E\varepsilon_s(x). \qquad (5.1)$$

Deformația $\varepsilon_s(x)$ este de asemenea o funcție ce depinde de x. Ea este crescătoare sau descrescătoare o dată cu $\sigma_s(x)$.

Relațiile dintre tensiune și deformație sînt

$$\sigma - \sigma_s = g(\varepsilon - \varepsilon_s) \quad \text{pentru } \varepsilon > \varepsilon_s(x) \qquad (5.2)$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{pentru } \varepsilon < \varepsilon_s(x) \qquad (5.3)$$

unde g este o funcţie cunoscută de argumentul $(\varepsilon - \varepsilon_s)$ [1]). Pentru cazul limitei de elasticitate descrescătoare şi pentru o bară semiinfinită, relaţia $\sigma \sim \varepsilon$ pentru diferite secţiuni x este reprezentată în fig. 37.

Ecuaţiile de mişcare sînt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \pm c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \varepsilon < \varepsilon_s(x) \qquad (5.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\varepsilon - \varepsilon_s)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{d\varepsilon_s}{dx}\right] + c_0^2 \frac{d\varepsilon_s}{dx}, \quad \varepsilon > \varepsilon_s(x) \qquad (5.5)$$

în care $c^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma(\varepsilon - \varepsilon_s)}{\partial[\varepsilon - \varepsilon_s]}$.

Caracteristicele ecuaţiei (5.5) şi relaţiile diferenţiale pe caracteristice sînt

$$dx = \pm c dt \qquad (5.6)$$

$$du_t = \pm c\, du_x + [c^2 - c_0^2] \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} dt. \qquad (5.7)$$

§ 2. LIMITA DE ELASTICITATE CRESCĂTOARE [175]

După cum am mai arătat, limita de elasticitate este crescătoare cînd încărcăm longitudinal o bară care a fost lovită, în prealabil, la capătul opus.

În acest caz, undele se vor propaga în felul umător: frontul din faţă al undelor elastice se va propaga cu viteza constantă $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$, iar frontul din spate cu viteza variabilă b. Domeniul deformaţiilor elastice este despărţit de domeniul deformaţiilor plastice printr-o frontieră $x = f(t)$ pe care derivatele de ordinul al doilea ale deplasărilor suferă discontinuităţi. Pe această frontieră deformaţiile sînt presupuse date şi egale cu $\varepsilon_s(x)$. Dacă funcţia $x = f(t)$ este cunoscută, atunci mişcarea în domeniul deformaţiilor elastice este complet determinată prin rezolvarea problemei mixte pentru ecuaţia undelor.

Să arătăm că în domeniul deformaţiilor plastice există o soluţie a ecuaţiei (5.5), care să posede o singularitate a undelor Riemann. Dacă admitem că în originea coordonatelor există o singularitate,

---

[1]) Şi în acest capitol, parantezele rotunde sînt rezervate pentru a indica argumentul unei funcţii.

Scanned with OKEN Scanner

atunci limita valorilor vitezelor şi deformaţiilor, pe baza lui (5.7), vor satisface în origine relaţia

$$u_t = -\int_0^{u_x} c\,(u_x - \varepsilon_s\,(0))\,du_x = -\psi\,(u_x). \tag{5.8}$$

În afară de aceasta, pe curba $x = f\,(t)$ vom presupune că avem

$$u_t = -c_0 u_x \tag{5.9}$$

(demonstraţia va fi dată mai tîrziu).

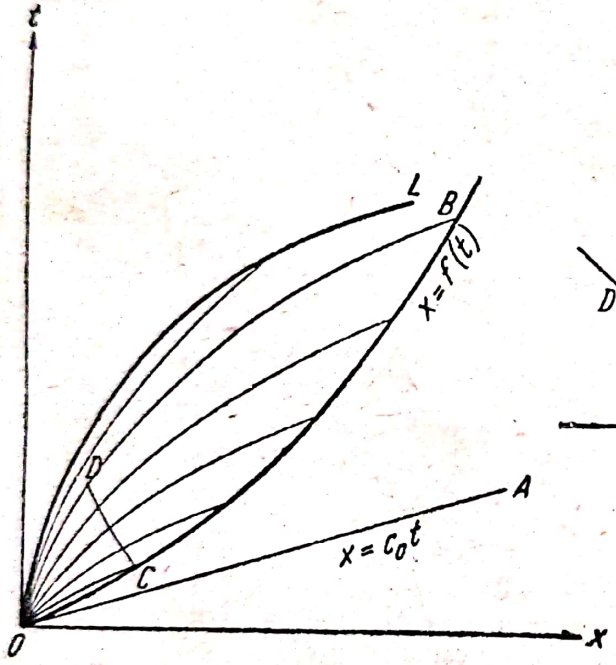

Fig. 38

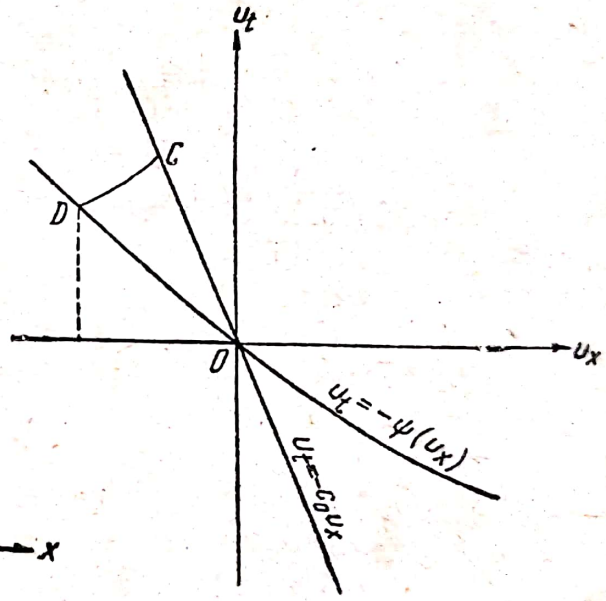

Fig. 39

Să arătăm că soluţia ecuaţiei (5.5) în domeniul cuprins între curba $x = f\,(t)$ şi caracteristica OB este complet determinată dacă admitem pe (5.8) şi (5.9). Se poate obţine în acelaşi timp şi legea de mişcare a frontului din faţă al undei plastice.

Să considerăm în planul (x, t) (fig. 38) caracteristica OC, suficient de apropiată de dreapta $x = c_0 t$. Pentru o pantă dată a acestei caracteristice, se poate determina deformaţia u_x din ecuaţia

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{tg}\varphi = c\,(u_x - \varepsilon_s\,(0)). \tag{5.10}$$

Prin urmare în planul (u_x, u_t) (fig. 39) este determinat punctul C.

Rezolvînd simultan ecuaţiile (5.7) şi (5.9) (înlocuind de exemplu ecuaţiile prin ecuaţii cu diferenţe finite), se găsesc valorile lui u_x şi u_t în punctul C de pe $x = f(t)$.

Din ecuaţia $u_x = \varepsilon_s(x)$ găsim abscisa x_c a punctului C. Întrucît acest punct este aşezat pe dreapta $x = \operatorname{tg} \varphi \cdot t$, coordonatele punctului C din planul (x, t) sînt determinate. Cunoscînd coordonatele lui C şi valorile vitezei şi deformaţiei în acest punct, prin metoda caracteristicelor se poate găsi u_x pe întreaga curbă CD.

Prin aceeaşi metodă poate fi determinată soluţia ecuaţiei (5.5) în întregul domeniul $OCBDO$ şi se poate găsi forma curbei $x = f(t)$.

De aici rezultă că legea de propagare a frontului din faţă al deformaţiilor plastice nu depinde de legea de variaţie a încărcării aplicate ci este determinată numai de distribuţia limitei de elasticitate variabile şi de forma curbei $\sigma = \sigma(\varepsilon)$.

O dată $x = f(t)$ cunoscut, aşa cum s-a arătat mai sus, se poate determina soluţia pentru domeniul deformaţiilor elastice. Ţinînd seama că pe dreapta $x = c_0 t$ deplasarea este nulă, această soluţie este de forma

$$u = F(c_0 t - x). \tag{5.11}$$

Din (5.11) prin derivare obţinem (5.9).

Soluţia ecuaţiei (5.5) pentru domeniul învecinat cu axa Ot (fig. 38) depinde de legea de variaţie a încărcării aplicate. Dacă încărcarea creşte în timp, obţinem problema mixtă pentru ecuaţia (5.5). Condiţiile la limită vor fi date pe caracteristică (viteza şi deformaţia) şi pe axa Ot (presiunea sau viteza). Dacă încărcarea aplicată este descrescătoare, atunci în origine, în acelaşi timp cu undele lui Riemann va apare şi unda de descărcare OL (fig. 38). În acest caz dacă se dă forma undei de descărcare, atunci pentru determinarea soluţiei în domeniul cuprins între ea şi axa Ot, obţinem problema lui Cauchy. Avînd soluţia problemei Cauchy, determinăm condiţia la capătul barei, care corespunde formei date a undei de descărcare.

Dacă este dată încărcarea la capătul barei, soluţia în domeniul amintit, precum şi forma undei de descărcare pot fi determinate prin metoda aproximativă a lui *Şapiro* [194] expusă în cap. I.

Ca exemplu, *Rahmatulin* consideră materialul consolidabil liniar. În acest caz undele neelastice Riemann se propagă cu viteza c_1 şi frontul din faţă al undelor plastice se concentrează în dreapta $x = c_1 t$, dacă încărcarea este instantanee.

Soluţia în domeniul deformaţiilor elastice este (5.11). Funcţia F se determină din ecuaţia $-F'(c_0 t - f(t)) = \varepsilon_s(f(t))$. Pentru cazul nostru particular $f(t) = c_1 t$, deci $-F'([c_0 - c_1]t) = \varepsilon_s(c_1 t)$ sau $F'(z) = -\varepsilon_s\left(\frac{c_1 z}{c_0 - c_1}\right)$.

Deci

$$F(c_0 t - x) = -\int_0^{c_0 t - x} \varepsilon_s \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} z\right) dz \qquad \left(\lambda = \frac{c_1}{c_0}\right). \quad (5.12)$$

Din forma acestei soluţii *Rahmatulin* trage concluzia că fiecare particulă emite o undă, pe care mărimea deformaţiilor este egală cu limita respectivă de elasticitate; aceste unde se propagă cu viteza c_0.

Pe dreapta $x = c_1 t$ avem salturi pentru tensiuni şi deformaţii. Dacă încărcarea creşte instantaneu şi apoi scade monoton, această dreaptă este şi undă de descărcare.

Să considerăm acum că încărcarea este crescătoare după o lege dată. Din (5.5) obţinem

$$u = F_1(c_1 t - x) + F_2(c_1 t + x) - \frac{c_0^2 - c_1^2}{c_1^2} \int_0^x \varepsilon_s(x)\, dx. \quad (5.13)$$

Funcţiile F_1 şi F_2 le determinăm din condiţiile de continuitate ale deplasării pe dreapta $x = c_1 t$ şi din condiţia dată la capătul barei. Să presupunem că la capătul barei este dată viteza de lovire $v_0(t)$; atunci $c_1 F_1'(c_1 t) + c_1 F_2'(c_1 t) = v_0(t)$, iar pe $x = c_1 t$:

$$F_1(0) + F_2(2c_1 t) - \left[\frac{1}{\lambda^2} - 1\right] \int_0^{c_1 t} \varepsilon_s(x)\, dx = -\int_0^{[c_0 - c_1]t} \varepsilon_s \left(\frac{\lambda z}{1-\lambda}\right) dz.$$

De aici se determină F_1 şi F_2

$$F_2(z) = \left[\frac{1}{\lambda^2} - 1\right] \int_0^{\frac{z}{2}} \varepsilon_s(x)\, dx - \int_0^{\zeta} \varepsilon_s \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \xi\right) d\xi, \quad \left(\zeta = \frac{c_0 - c_1}{2c_1} z\right) \quad (5.14)$$

$$F_1(z) = \frac{1}{c_1} \int_0^z v_0\left(\frac{y}{c_1}\right) dy - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda^2} - 1\right] \int_0^z \varepsilon_s\left(\frac{y}{2}\right) dy - \frac{1-\lambda}{2\lambda} \int_0^z \varepsilon_s\left(\frac{y}{2}\right) dy,$$

şi deci este determinată soluţia în domeniul deformaţiilor plastice.

Să examinăm acum problema în domeniul descărcării. Fie $\varepsilon_m(x)$ valoarea deformaţiei pe unda de descărcare. Atunci pentru tensiuni avem

$$\sigma_m = \sigma_s(x) + [\varepsilon_m(x) - \varepsilon_s(x)] E_1 - [\varepsilon_m(x) - u_x] E. \quad (5.15)$$

Ecuaţia de mişcare va fi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [c_0^2 - c_1^2]\left[\frac{d\varepsilon_s}{dx} - \frac{d\varepsilon_m}{dx}\right] \quad (5.16)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar soluția ei este

$$u = \Phi_1(c_0 t - x) + \Phi_2(c_0 t + x) + [1 - \lambda^2] \int_0^x [\varepsilon_m(x) - \varepsilon_s(x)]\, dx. \quad (5.17)$$

Din condițiile pe unda de descărcare obținem

$$-\Phi_1'([c_0 - c_1]t) + \Phi_2'([c_0 + c_1]t) + [1 - \lambda^2][\varepsilon_m(c_1 t) - \varepsilon_s(c_1 t)] = \varepsilon_m(c_1 t) \quad (5.18)$$

$$\Phi_1([c_0 - c_1]t) + \Phi_2([c_0 + c_1]t) + [1 - \lambda^2] \int_0^{c_1 t} [\varepsilon_m(x) - \varepsilon_s(x)]\, dx =$$

$$= - \int_0^{[c_0 - c_1]t} \varepsilon_s\left(\frac{\lambda}{1 - \lambda} z\right) dz \quad (5.19)$$

iar din condiția la capătul barei

$$c_0 \Phi_1'(c_0 t) + c_0 \Phi_2'(c_0 t) = v_0(t) \quad \text{sau} \quad \Phi_1'(z) = \frac{1}{c_0} v_0\left(\frac{z}{c_0}\right) - \Phi_2'(z). \quad (5.20)$$

Derivînd pe (5.19) și ținînd seama de (5.20) în (5.18) și (5.19), obținem

$$\Phi_2'([c_0 - c_1]t) + \Phi_2'([c_0 + c_1]t) - \frac{1}{c_0} v_0\left(\frac{c_0 - c_1}{c_0} t\right) = \lambda^2 [\varepsilon_m(c_1 t) - \varepsilon_s(c_1 t)] + \varepsilon_s(c_1 t)$$

$$(c_0 - c_1)\left\{\frac{1}{c_0} v_0\left(\frac{c_0 - c_1}{c_0} t\right) - \Phi_2'([c_0 - c_1]t)\right\} +$$

$$+ [c_0 + c_1]\Phi_2'([c_0 + c_1]t) = -[1 - \lambda^2]\, c_1 [\varepsilon_m(c_1 t) - \varepsilon_s(c_1 t)] - [c_0 - c_1]\varepsilon_s(c_1 t). \quad (5.21)$$

Eliminînd din (5.21) pe $\varepsilon_m(c_1 t)$, obținem o ecuație funcțională pentru determinarea lui Φ_2'. Astfel este determinată soluția în domeniul descărcării.

§ 3. LIMITA DE ELASTICITATE DESCRESCĂTOARE

Acest caz are loc cînd bara este lovită de mai multe ori la unul și același capăt. Problema importantă care se pune este calculul acumulării deformațiilor plastice. Această problemă a fost considerată de *H. A. Rahmatulin* [172] în 1946 pentru cazul consolidării liniare și al acumulării deformațiilor plastice la capătul barei.

În 1950 el a extins aceste rezultate [175] pentru cazul consolidării oarecare, iar pentru cazul consolidării liniare se dă o soluție convenabilă pentru toată bara.

Se consideră pentru început cazul cînd presiunea aplicată la capătul barei crește monoton de la zero. Imaginea mișcării este dată în fig. 40. Curba AB este frontiera dintre domeniul deformațiilor elastice și plastice.

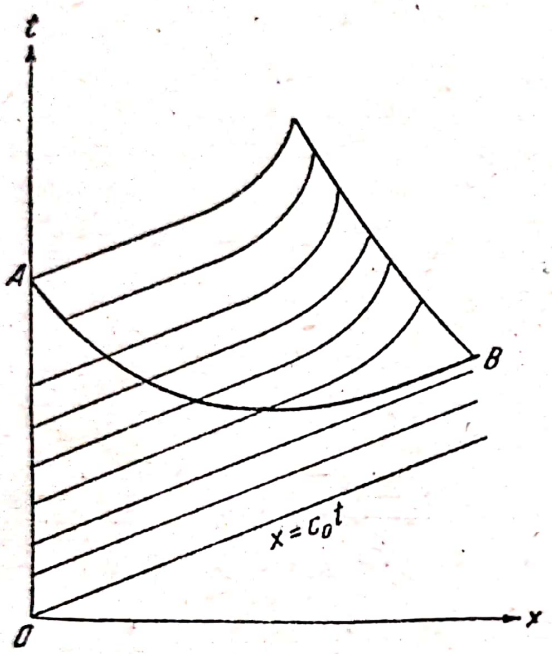

Fig. 40

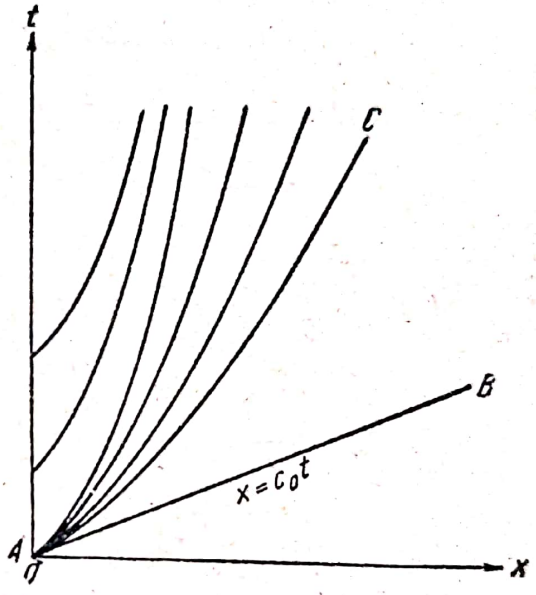

Fig. 41

Dacă încărcarea este instantanee, se obține imaginea mișcării din fig. 41. Ea se poate obține din fig. 40 prin trecerea la limită. Atunci curba AB coincide cu dreapta $x = c_0 t$, care este o suprafață de discontinuitate propagabilă. La trecerea acestei suprafețe printr-o secțiune a barei, aceasta suferă o deformație egală cu limita de elasticitate corespunzătoare acestei secțiuni.

Dacă presupunem că curba $\sigma = \sigma(\ )$ are o tangentă continuă, atunci dreapta indicată va fi o caracteristică a ecuației de mișcare. Prin urmare pe ea are loc ecuația $du_t = c_0\, du_x$, căci pe dreapta $x = c_0 t$, $c = c_0$ și deci termenul liber al ecuației (5.5) dispare. Pe de altă parte deplasarea de-a lungul dreptei $x = c_0 t$ este nulă, și deci $u_t = -c_0\, u_x$, ceea ce contrazice relația precedentă. Se poate evita această contradicție, admițînd o oarecare discontinuitate a tangentei la curba $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ prin trecerea de la deformațiile elastice la cele plastice. Dacă această discontinuitate există, atunci caracteristica AC va fi diferită de dreapta $x = c_0 t$; cu cît această

discontinuitate este mai mică, cu atît curba AC se va apropia de dreapta $x = c_0 t$ (fig. 41).

Prin urmare, determinarea undelor lui Riemann revine la integrarea ecuaţiilor (5.6) şi (5.7), pentru condiţiile: $u_x = \varepsilon_s$, $u_t = -c_0 \varepsilon_s$ pe $x = c_0 t$.

Prin trecerea de-a lungul diferitelor direcţii către originea coordonatelor, are loc relaţia $u_t = -\int_0^{u_x} c\,(u_x - \varepsilon_s)\,du_x$.

Să trecem acum la consolidarea liniară. În acest caz caracteristica AC, ca şi tot fasciculul de caracteristice trecînd prin O, se transformă în dreapta $x = c_1 t$. Pe unda de şoc $x = c_0 t$ avem

$$u_x = \varepsilon_s(x), \qquad u_t = -c_0 \varepsilon_s(x). \tag{5.22}$$

Între dreptele $x = c_0 t$ şi $x = c_1 t$ trebuie rezolvată problema lui Cauchy pentru ecuaţia (5.5). Vom ţine seama că în acest caz în (5.5) $c = c_1$. Soluţia acestei probleme va fi

$$u = \Phi_3(x - c_1 t) + \Phi_4(x + c_1 t) - \frac{c_0^2 - c_1^2}{c_1^2} \int_0^x \varepsilon_s(x)\,dx. \tag{5.23}$$

Funcţiile Φ_3 şi Φ_4 se determină din condiţiile pe dreapta $x = c_0 t$, care nu este o caracteristică a ecuaţiei (5.5). Obţinem astfel

$$\begin{aligned} &\Phi_3'([c_0 - c_1]\,t) + \Phi_4'([c_0 + c_1]\,t) - \left[\frac{1}{\lambda^2} - 1\right]\varepsilon_s(x) = \varepsilon_s(x) \\ &-c_1 \Phi_3'([c_0 - c_1]\,t) + c_1 \Phi_4'([c_0 + c_1]\,t) = -c_1 \varepsilon_s(x). \end{aligned} \tag{5.24}$$

De aici

$$\begin{aligned} \Phi_4'([c_0 + c_1]\,t) &= \frac{1}{2c_1}\left[\frac{c_1}{\lambda^2} - c_0\right]\varepsilon_s(c_1 t) \\ \Phi_3'([c_0 - c_1]\,t) &= \frac{1}{2c_1}\left[\frac{c_1}{\lambda^2} + c_0\right]\varepsilon_s(c_1 t) \end{aligned} \tag{5.25}$$

de unde se determină Φ_3 şi Φ_4. Folosindu-ne de (5.24) să calculăm pe $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}$ pe dreapta $x = c_0 t$. Avem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = c_1\left\{\Phi_4''([c_0 + c_1]\,t) - \Phi_3''([c_0 - c_1]\,t)\right\} = -c_0 \frac{d\,\varepsilon_s}{dx}.$$

Rezultă deci că dacă limita de elasticitate este descrescătoare (adică

$\frac{d\varepsilon_s}{dx} < 0$), atunci după trecerea suprafeței de discontinuitate $x = c_0 t$, deformațiile cresc în valoare absolută $\left(\frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial t} > 0 \right)$.

Utilizînd soluțiile (5.21) și (5.25) se pot rezolva și probleme în care bara este lovită în prealabil la ambele capete, și se dă legea de distribuție a lui $\varepsilon_s(x)$.

§ 4. PROBLEMA ACUMULĂRII ÎN BARĂ A DEFORMAȚIILOR PLASTICE

Să considerăm acum problema loviriі repetate a unei bare de lungime l, care inițial era omogenă din punct de vedere mecanic.

Rahmatulin inversează problema și consideră că bara lovește o placă rigidă și fixă. Originea coordonatelor se ia în secțiunea capătului lovit. Ecuația de mișcare pentru prima lovire este (1.3). Notînd cu v_0 viteza de lovire și cu ε_{max} deformația maximă în bară, avem din (1.19)

$$\frac{x}{t} = c(u_x), \quad v_0 = \int_0^{\varepsilon_{max}} c(u_x)\, du_x \quad (\varepsilon_{max} > 0,\ c > 0). \tag{5.26}$$

Prima undă de încărcare, ajungînd la capătul liber al barei, se reflectă ca undă de descărcare și de șoc. Ecuația liniei de discontinuitate (frontul undei reflectate) în planul (x, t) este

$$x + c_0 t = 2l. \tag{5.27}$$

Notînd cu ε_{m0} valoarea deformației pe unda de descărcare în partea undelor lui Riemann, din (5.26) și (5.27) obținem

$$c(\varepsilon_{m0}) = \frac{xc_0}{2l - x}. \tag{5.28}$$

Folosindu-ne de legea de descărcare și de formula (5.28) se obține ușor legea distribuției limitei de elasticitate $\sigma_s(x)$ după prima lovire

$$\sigma_s(x) = \sigma(\varepsilon_{m0}) = \sigma\left[c^{-1} \left(\frac{xc_0}{2l - x} \right) \right]. \tag{5.29}$$

Pentru că în domeniul OBC (fig. 42) pentru oricare lovitură deformațiile sînt constante, atunci notînd cu $\tilde{\varepsilon}_1$ deformația plastică după prima lovire, obținem

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_{max,1} - \frac{\sigma_1(\varepsilon_{max,1})}{E}. \tag{5.30}$$

Scanned with OKEN Scanner

Limita de elasticitate σ_{s1} la capătul barei se obține din

$$\sigma_{s1} = \sigma_1 \ (\varepsilon_{max,\,1}). \tag{5.31}$$

Din (5.26) obținem

$$v_0 = c_0\varepsilon_{s,0} + \int\limits_{\varepsilon_{s,0}}^{\varepsilon_{max}} c\ (u_x)\ du_x\,. \tag{5.32}$$

Întrucît în domeniul OBC deformația este constantă, pentru o lovitură oarecare avem

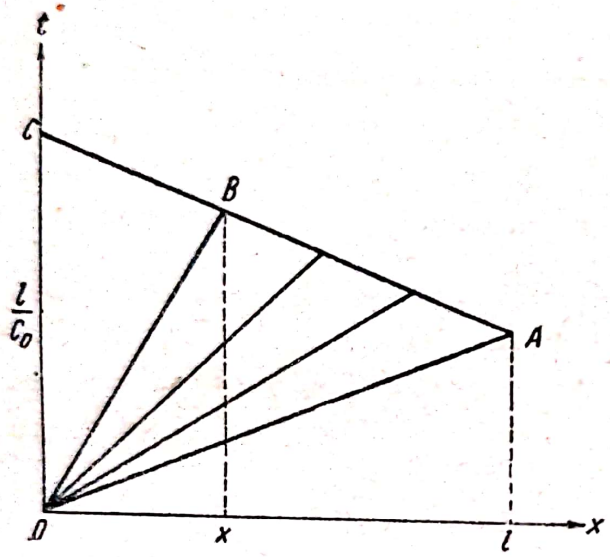

Fig. 42

$$v_0 = c_0\varepsilon_{s,n-1} + \int\limits_{\varepsilon_{s,\,n-1}}^{\varepsilon_{max,\,n}} c(u_x)\,du_x \tag{5.33}$$

$$\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_{max,n} - \frac{\sigma_n\,(\varepsilon_{max,n})}{E} = \varepsilon_{max,n} - \varepsilon_{sn} \tag{5.34}$$

în care $\varepsilon_{max,\,n}$ este deformația maximă după n lovituri, ε^{sn} deformația elastică după n lovituri. Scriind relația (5.33) pentru a $n-1$-a lovitură, obținem o formulă de recurență între deformațiile maxime pentru două lovituri consecutive cu aceeași viteză

$$v_0 = c_0\frac{\sigma\,(\varepsilon_{max,\,n-1} + \delta_n)}{E} + \int\limits_{\frac{\sigma\,(\varepsilon_{max,\,n} + \delta_n)}{E}}^{\varepsilon_{max,\,n}} c\,(u_x)\,du_x \tag{5.35}$$

unde $\delta_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \tilde{\varepsilon}_\nu$.

Să demonstrăm că procesul de consolidare se termină numai după un număr nemărginit de mare de lovituri.

Utilizînd o teoremă de medie, (5.32) dă

$$v_0 = c_0\varepsilon_{s,\,n-1} + c_n\,[\varepsilon_{max,\,n} - \varepsilon_{s,\,n-1}] \tag{5.36}$$

în care c_n satisface inegalitatea $c_1 < c_n < c_0$, iar $c_1 > 0$ este minimul lui c pentru toate deformațiile. Vom duce în planul graficului

Scanned with OKEN Scanner

$\sigma \sim \varepsilon$ o dreaptă prin punctele σ_{n-1} și σ_n. Notînd cu E_n unghiul pe care-l face această dreaptă cu axa ε, obținem

$$\varepsilon_{sn} = \varepsilon_{s,\,n-1} + \frac{E_n}{E}[\varepsilon_{max,\,n} - \varepsilon_{s,\,n-1}]. \tag{5.37}$$

Avem de asemenea $E_1 < E_n < E$, unde E_1 este valoarea lui $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ corespunzătoare lui c_1. Introducînd (5.36) în (5.37) obținem

$$\varepsilon_{sn} = \lambda_n \varepsilon_{s,\,n-1} + q_n \quad \text{cu} \quad \lambda_n = 1 - \frac{E_n c_0}{E c_n}, \quad q_n = \frac{E_n}{E}\frac{v_0}{c_n}. \tag{5.38}$$

Să presupunem că $0 < \lambda_n < 1$. Această presupunere este adevărată pentru majoritatea curbelor $\sigma \sim \varepsilon$ uzuale, și în particular pentru consolidarea liniară. Din (5.38) obținem

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sn} &= q_n + \lambda_n[\lambda_{n-1}\varepsilon_{s,\,n-2} + q_{n-1}], \quad \text{sau} \\ \varepsilon_{sn} &= q_n + \lambda_n q_{n-1} + \lambda_n \lambda_{n-1} q_{n-2} + \cdots + \\ &+ \lambda_n \lambda_{n-1} \cdots + \lambda_1 q_0 + \lambda_n \lambda_{n-1} \cdots + \lambda_1 \varepsilon_{s0}. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Pentru că toți termenii acestei sume sînt pozitivi pentru orice număr de loviri, deformația ε_{sn} se mărește cu creșterea lui n. Să arătăm că ε_s tinde către o limită cînd $n \to \infty$. Pentru că $\lambda_n < \lambda$, $q_n < q$ pentru orice n, atunci din (5.39) avem

$$\varepsilon_{sn} < q[1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{n-1}] + \lambda^n \varepsilon_{s0}.$$

Deci

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_{sn} < \frac{q}{1 - \lambda}.$$

În felul acesta teorema este demonstrată. Ea este datorită lui *Rahmatulin*.

Teoria de mai sus a lui *Rahmatulin* a fost verificată experimental de *Nadeeva* [151]. Epruvetele folosite erau din oțel moale. Vitezele de lovire au fost de 44—48 m/s și apoi de 33 m/s (v. capitolul precedent). *Nadeeva* trage concluzia că rezultatele teoretice sînt în concordanță cu cele experimentale.

Cazul încărcărilor repetate dar de semne contrare a fost considerat de *V. S. Lenski* [125]. Materialul se consideră elasto-plastic cu consolidare liniară, iar bara cilindrică și omogenă. Încărcarea este periodică și cu ciclu simetric. În fiecare secțiune a barei, acest ciclu este însă diferit. Deci lărgimea buclei de histerezis va diferi de la secțiune la secțiune. Pentru rezolvarea problemei, *Lenski* se folosește de rezultatele lui *Rahmatulin*, expuse mai sus. Se consideră și problema barei finite.

Scanned with OKEN Scanner

§ 5. O ALTĂ TRATARE A PROBLEMEI

Problema propagării undelor elasto-plastice în bare semiinfinite cu limita de elasticitate variabilă a fost considerată și de *S. D. Mocialov* [145], care s-a bazat pe rezultatele lui *Rahmatulin*, dar a considerat o altă relație între tensiuni și deformații.

El pornește de la observația că dacă dintr-un punct oarecare al diagramei inițiale $\sigma \sim \varepsilon$ a materialului, provocăm descărcarea și apoi încărcăm din nou, după atingerea noii limite de elasticitate,

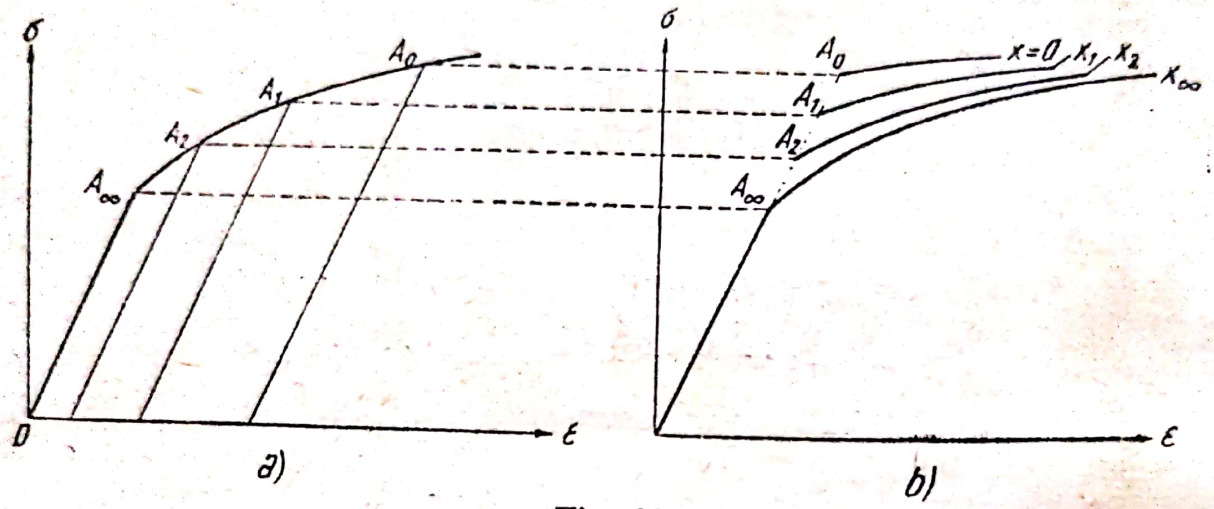

Fig. 43

curba $\sigma \sim \varepsilon$ urmează (începînd cu acel punct, adică punctele A_2, A_1, A_0 de pe fig. 43, *a*) diagrama inițială, ca și cum descărcarea nu ar fi avut loc.

Ținînd seamă de această observație, relația dintre tensiuni și deformații utilizată de *Mocialov* este

$$\begin{aligned} &\sigma = \sigma\left(\varepsilon\left(x, t\right) + \tilde{\varepsilon}\left(x\right)\right) && \text{pentru} \quad |\varepsilon| > |\varepsilon_s\left(x\right)| \\ &\sigma = E\varepsilon && \text{pentru} \quad |\varepsilon| < |\varepsilon_s\left(x\right)|. \end{aligned} \tag{5.40}$$

În (5.40) $\tilde{\varepsilon}\left(x\right)$ este deformația plastică a secțiunii, datorită încărcărilor anterioare, iar $\varepsilon\left(x, t\right)$ deformația datorită ultimei încărcări.

Să introducem funcția

$$u^*\left(x, t\right) = u\left(x, t\right) + \int_0^x \tilde{\varepsilon}\left(x\right) dx \tag{5.41}$$

unde $u\left(x, t\right)$ este deplasarea în bara cu limita de elasticitate variabilă. Relațiile (5.40) se pot scrie acum

$$\begin{aligned} &\sigma\left(x, t\right) = \sigma\left(u_x^*\right) && \text{pentru} \quad |\tilde{u}_x| > |\varepsilon_s\left(x\right) + \tilde{\varepsilon}(x)| \\ &\sigma\left(x, t\right) = E\varepsilon\left(x, t\right) && \text{pentru} \quad |\tilde{u}_x| < |\varepsilon_s\left(x\right) + \tilde{\varepsilon}(x)|. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de aceste relaţii, ecuaţia de mişcare în bara cu limita de elasticitate variabilă este

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = c^2\left(u_x^*\right)\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \quad \text{cu} \quad c^2\left(u_x^*\right) = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \sigma\left(u_x^*\right)}{\partial u_x^*} \tag{5.43}$$

pentru $|u_x^*| > |\varepsilon_s(x) + \tilde{\varepsilon}(x)|$, iar pentru $|u_x^*| < |\varepsilon_s(x) + \tilde{\varepsilon}(x)|$, ea este ecuaţia obişnuită a vibraţiilor elastice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5.44}$$

Utilizînd relaţiile dintre tensiuni şi deformaţii citate mai sus, precum şi ecuaţiile citate mai sus, *Mocialov*, urmînd raţionamentele lui *Rahmatulin*, studiază propagarea undelor într-o bară semiinfinită cu limita de elasticitate descrescătoare. Este de asemenea studiată şi problema propagării undelor în bare semiinfinite cu limita de elasticitate crescătoare, iar într-o altă lucrare [146] *Mocialov* studiază problema acumulării deformaţiilor plastice într-o bară, prin lovirea ei repetată. Loviturile sînt considerate de diferite intensităţi. *Mocialov* regăseşte rezultatele obţinute anterior de *Rahmatulin*.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI

PROPAGAREA PERTURBAȚIILOR ÎN FIRE FLEXIBILE ȘI DEFORMABILE[1])

§ 1. LOVIREA OBLICĂ CU VITEZĂ CONSTANTĂ A UNUI FIR FLEXIBIL

a) **Ecuațiile problemei.** Problema lovirii unui fir flexibil cu un punct material de masă infinită a fost considerată de *H. A. Rahmatulin* [171] în 1945. Inițial se presupune că firul este rectiliniu și nemărginit. Punctul material care lovește se mișcă cu viteza v_0 ce

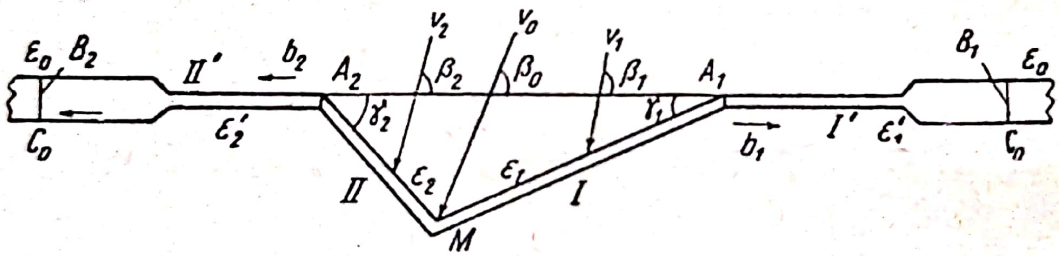

Fig. 44

face unghiul β_0 cu poziția inițială a firului; viteza v_0 trebuie considerată constantă din cauza infinității masei punctului material. *Rahmatulin* consideră cazul lovirii cu alunecare în prezența frecării și cazul lovirii fără alunecare, adică punctul material se mișcă tot timpul cu unul și același punct de pe fir. Mișcarea firului este mereu plană.

Se admite de la bun început că datorită lovirii are loc situația din fig. 44: în dreapta și stînga punctului material, se vor propaga două sisteme de unde. În primul rînd se propagă undele longitudinale ale lui Riemann care provoacă o subțiere a firului, iar

[1]) Prin fire «deformabile» vom înțelege firele extensibile (elastice, viscoelastice, plastice etc.).

apoi se propagă unde transversale de şoc care modifică forma iniţială rectilinie a firului. După cum vom vedea în § 3 al acestui capitol, aceasta nu este unica soluţie posibilă, căci uneori undele transversale se pot propaga mai repede decît cele longitudinale.

În fig. 44 am utilizat notaţiile: ε_0 este deformaţia iniţială a firului, adică deformaţia înainte de lovire; ε_1 şi ε_2 sînt deformaţiile corespunzătoare domenilor I şi II; ε_1' şi ε_2' sînt deformaţiile maxime corespunzătoare domeniilor I' şi II'; v_1 şi v_2 sînt vitezele particulelor din I şi II; u_1 şi u_2 sînt vitezele maxime ale particulelor din domeniile I' şi II'; b_1 şi b_2 sînt vitezele de propagare ale undelor de şoc; β_1 şi β_2 sînt unghiurile pe care le fac vitezele v_1 şi v_2 cu poziţia iniţială a firului.

În total sînt deci 15 parametri, dintre care 14 sînt necunoscuţi, căci ε_0 se presupune dat. Să stabilim ecuaţiile din care se determină aceşti parametri.

În porţiunile de fir străbătute de unde Riemann, vitezele particulelor, ca şi în cazul barei, sînt date de

$$u = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} c(\varepsilon)\, d\varepsilon = \psi(\varepsilon, \varepsilon_0) \tag{6.1}$$

în care $c(\varepsilon)$ este viteza de propagare a undei

$$c(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{dT}{d\varepsilon}} \tag{6.2}$$

$T = T(\varepsilon)$ fiind tensiunea în punctul respectiv al firului, iar ρ_0 este masa unitară a firului.

Să ne referim în cele ce urmează numai la porţiunea din dreapta firului. Din (6.1) avem deci

$$u_1 = \psi(\varepsilon_1', \varepsilon_0) = \psi(\varepsilon_1'). \tag{6.3}$$

Teorema cantităţii de mişcare pentru elementul de lungime $(b_1 + u_1)\, dt$, ce se află în dreapta undei de şoc (adică I'), proiectată pe direcţia iniţială a firului şi pe o perpendiculară la ea, este

$$\rho_1' (b_1 + u_1)(v_1 \cos \beta_1 - u_1) = T_1 \cos \gamma_1 - T_1' \tag{6.4}$$

$$\rho_1' (b_1 + u_1)\, v_1 \sin \beta_1 = T_1 \sin \gamma_1 \tag{6.5}$$

unde $T_1 = T(\varepsilon_1)$ este tensiunea pe frontul undei de şoc, adică tensiunea la capătul din stînga al elementului considerat, $T_1' = T(\varepsilon_1')$ este tensiunea la capătul din dreapta al elementului, ρ_1' este masa unităţii de lungime din domeniul I'.

Scanned with OKEN Scanner

Să scriem acum condiția de continuitate a deplasării prin trecerea particulei din domeniul I' în I. Din fig. 45 avem

$$BC = \sqrt{v_1^2 \sin^2 \beta_1 + (b_1 + v_1 \cos \beta_1)^2}.$$

Înainte de trecerea undei de șoc, elementul BC avea lungimea $b_1 + u_1$. Egalînd între ele lungimea nedeformată a segmentului BC calculată înainte de trecerea frontului undei de șoc, cu lungimea aceluiași segment după trecerea undei de șoc, obținem

$$\frac{b_1 + u_1}{1 + \varepsilon_1'} = \frac{\sqrt{v_1^2 \sin^2 \beta_1 + (b_1 + v_1 \cos \beta_1)^2}}{1 + \varepsilon_1}. \tag{6.6}$$

Din fig. 44 obținem condiția geometrică

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{v_0 \sin \beta_0}{b_1 + v_0 \cos \beta_0}. \tag{6.7}$$

Să scriem acum condiția de alunecare a punctului M. Ea revine la a scrie că componentele pe normala la fir, ale vitezei punctului și firului sînt egale. Adică

$$v_0 \sin (\beta_0 - \gamma_1) = v_1 \sin (\beta_1 - \gamma_1). \tag{6.8}$$

În mod cu totul similar se pot obține ecuațiile corespunzătoare domeniului din stînga punctului M. Ele sînt

$$u_2 = \psi (\varepsilon_2') \tag{6.9}$$

$$\rho_2' (b_2 + u_2) (-v_2 \cos \beta_2 - u_2) = T_2 \cos \gamma_2 - T_2' \tag{6.10}$$

$$\rho_2' (b_2 + u_2) v_2 \sin \beta_2 = T_2 \sin \gamma_2 \tag{6.11}$$

$$\frac{b_2 + u_2}{1 + \varepsilon_2'} = \frac{\sqrt{v_2^2 \sin^2 \beta_2 + (b_2 - v_2 \cos \beta_2)^2}}{1 + \varepsilon_2} \tag{6.12}$$

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{v_0 \sin \beta_0}{b_2 - v_0 \cos \beta_0} \tag{6.13}$$

$$v_0 \sin (\gamma_2 + \beta_0) = v_2 \sin (\gamma_2 + \beta_2). \tag{6.14}$$

Să scriem acum ecuațiile de legătură între domeniile I și II. Din fig. 46 avem

$$MN^2 = v_2^2 + v_0^2 - 2v_2 v_0 \cos (\beta_2 - \beta_0)$$

$$LK^2 = v_1^2 + v_0^2 - 2v_1 v_0 \cos (\beta_1 - \beta_0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar pentru că

$$\frac{MN}{1+\varepsilon_2} = \frac{LK}{1+\varepsilon_1}$$

obţinem prima relaţie de legătură

$$(1+\varepsilon_1)\sqrt{v_2^2+v_0^2+2v_2v_0\cos(\beta_2-\beta_0)} = \\ = (1+\varepsilon_2)\sqrt{v_1^2+v_0^2-2v_1v_0\cos(\beta_1-\beta_0)}. \tag{6.15}$$

Dacă presupunem că punctul M este de fapt un cilindru de rază mică, notînd coeficientul de frecare cu f, obţinem a doua ecuaţie de legătură:

$$T_1 = T_2\, e^{f(\gamma_1+\gamma_2)}. \tag{6.16}$$

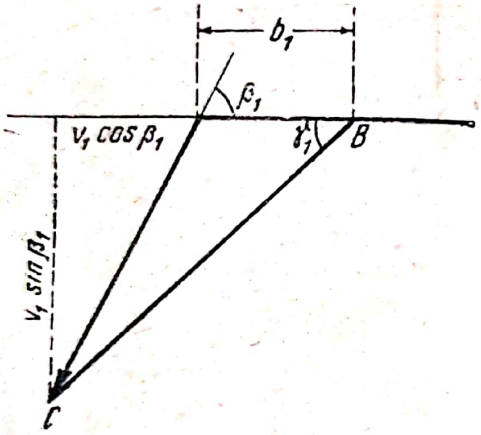

Fig. 45

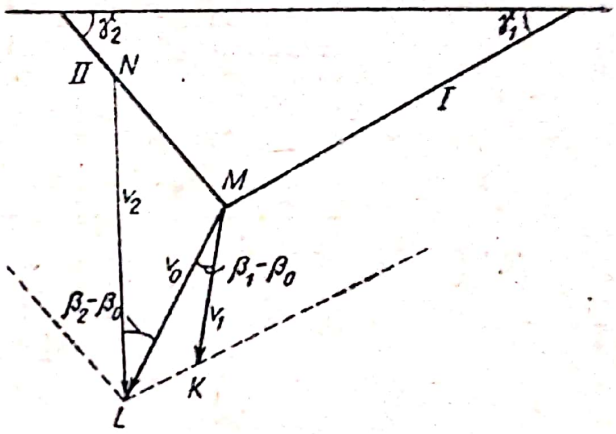

Fig. 46

Din cele 14 ecuaţii (6.3) — (6.16) putem determina parametrii necunoscuţi în funcţie de v_0, β_0, ε_0.

b) **Deformaţiile maxime.** Să arătăm că deformaţia maximă în domeniul I' este egală cu deformaţia particulelor firului ce aparţin domeniului I, adică $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$.

Pentru aceasta să înmulţim ecuaţia (6.4) cu $\sin\gamma_1$, ecuaţia (6.5) cu $\cos\gamma_1$ şi scăzînd rezultatele obţinem

$$\rho_1'(b_1+u_2)[v_1\sin(\gamma_1-\beta_1)-u_1\sin\gamma_1] = -T_1'\sin\gamma_1. \tag{6.17}$$

Din (1.7) avem $b_1\sin\gamma_1 = v_0\sin(\beta_0-\gamma_1)$, deci din (6.8) rezultă $v_1\sin(\beta_1-\gamma_1) = b_1\sin\gamma_1$. Introducînd această relaţie în (6.17) obţinem

$$\rho_1'(b_1+u_1)^2 = T_1'(\varepsilon_1'). \tag{6.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru că u_1 este funcție de ε_1', relația (6.18) leagă viteza b_1 de deformația ε_1'. Din (6.6) rezultă

$$\frac{(b_1+u_2)^2(1+\varepsilon_1)^2}{(1+\varepsilon_1')^2} = v_1^2 + 2v_1 b_1 \cos\beta_1 + b_1^2. \tag{6.19}$$

Formulele (6.4) și (6.5), ținînd seama și de (6.18), devin

$$v_1 \sin\beta_1 = \frac{T_1 \sin\gamma_1}{\rho_1'(b_1+u_1)}$$

$$v_1\cos\beta_1 = \frac{T_1\cos\gamma_1}{\rho_1'(b_1+u_1)} - \frac{T_1'}{\rho_1'(b_1+u_1)} + u_1 = \frac{T_1\cos\gamma_1}{\rho_1'(b_1+u_1)} - b_1. \tag{6.20}$$

Ridicăm la pătrat și adunăm; obținem

$$v_1^2 = \frac{T_1^2}{\rho_1'^2(b_1+u_1)^2} - 2b_1\frac{T_1\cos\gamma_1}{\rho_1'(b_1+u_1)} + b_1^2. \tag{6.21}$$

Dacă în (6.19) ținem seama de prima relație (6.20) și de (6.21), și apoi de (6.18), obținem

$$\frac{T_1'^2}{(1+\varepsilon_1')^2} = \frac{T_1^2}{(1+\varepsilon_1)^2} \quad \text{sau} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1'. \tag{6.22}$$

Similar se obține $\varepsilon_2 = \varepsilon_2'$. De remarcat că ecuația (6.22) admite și soluții diferite de $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$. *Rahmatulin* a arătat că soluția acestei ecuații, diferită de $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$, nu are nici un sens fizic.

Aceasta se arată foarte ușor dacă presupunem firul elastic, adică $T = E\varepsilon$. În acest caz (6.22) devine

$$\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} = \frac{\varepsilon_1^2}{(1+\varepsilon_1)^2}.$$

Rezolvînd în raport cu ε, obținem două soluții

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \quad \text{și} \quad \varepsilon = -\frac{\varepsilon_1}{1+2\varepsilon_1}.$$

Cea de a doua, ducînd la deformații negative, trebuie exclusă.

c) **Cazul lovirii fără frecare.** În lipsa frecării, coeficientul de frecare f este nul. Atunci din (6.16) obținem $T_1 = T_2 = T$; deci avem și $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, adică deformațiile în domeniile *I* și *II* sînt aceleași. Ecuația (6.15) devine în acest caz

$$v_2^2 - v_1^2 = 2v_0\{[v_2\sin\beta_2 - v_1\sin\beta_1]\sin\beta_0 + [v_2\cos\beta_2 - v_1\cos\beta_1]\cos\beta_2\}. \tag{6.23}$$

Scanned with OKEN Scanner

În afară de aceasta, în cazul considerat, din (6.1) și (6.9) rezultă $u_1 = u_2 = u$, și deci

$$b_1 = b_2 = b, \qquad \rho_1' = \rho_2' = \rho' = \frac{\rho_0}{1+\varepsilon}.$$

Din (6.21) și ecuația similară pentru v_2^2, obținem

$$v_2^2 - v_1^2 = 2b \frac{T}{\rho'(b+u)} (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2).$$

Analog din (6.20) și similarele rezultă

$$v_2 \sin \beta_2 - v_1 \sin \beta_1 = \frac{T}{\rho'(b+u)} (\sin \gamma_2 - \sin \gamma_1)$$

$$v_2 \cos \beta_2 - v_1 \cos \beta_1 = 2b - \frac{T}{\rho'(b+u)} (\cos \gamma_2 + \cos \gamma_1).$$

Deci ecuația (6.23) se poate scrie sub forma

$$b(\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2) = v_2 \left\{ (\sin \gamma_2 - \sin \gamma_1) \sin \beta_0 + \frac{2b\rho'(b+u)}{T} \cos \beta_0 - \right.$$
$$\left. - (\cos \gamma_2 + \cos \gamma_1) \cos \beta_0 \right\}.$$

Din (6.7) și (6.13) determinăm pe $v_0 \cos \beta$ și $v_0 \sin \beta$:

$$v_0 \sin \beta_0 = \frac{2b \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2}, \quad v_0 \cos \beta_0 = \frac{b(\operatorname{tg} \gamma_2 - \operatorname{tg} \gamma_1)}{\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2}. \tag{6.24}$$

În cele din urmă, relația (6.23) devine

$$(\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2)(\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2) = 2(\sin \gamma_2 - \sin \gamma_1) \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_2 + \tag{6.25}$$
$$+ (\lambda - \cos \gamma_1 - \cos \gamma_2)(\operatorname{tg} \gamma_2 - \operatorname{tg} \gamma_1).$$

Ea este ecuația de bază care rezolvă problema lovirii oblice, fără frecare a firului. În afară de ea mai avem și relațiile

$$\lambda = \frac{2b\rho'(b+u)}{T(\varepsilon)} = \frac{2b}{b+u}, \qquad \rho_0 (b+u)^2 = (1+\varepsilon) T,$$
$$u = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} c(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{6.26}$$

Din (6.24) mai obținem

$$v_0^2 = l^2 \frac{(\operatorname{tg} \gamma_2 - \operatorname{tg} \gamma_1)^2 + 4 \operatorname{tg}^2 \gamma_1 \operatorname{tg}^2 \gamma_2}{(\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2)^2},$$
$$\operatorname{ctg} \beta_0 = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \gamma_1 - \operatorname{ctg} \gamma_2). \tag{6.27}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile (6.25), (6.26) și (6.27) permit să se rezolve pînă la capăt problema lovirii oblice a firului, cînd se dau viteza de lovire v_0 și unghiul de lovire β_0.

d) **Cazul lovirii normale.** În cazul lovirii normale $\left(\beta_0 = \frac{\pi}{2}\right)$, pe baza simetriei, deformațiile din stînga și din dreapta punctului M sînt egale. În acest caz ecuația de legătură (6.16) se înlocuiește cu

$$T_1 = T_2 \quad \text{sau} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2. \tag{6.28}$$

Ecuația (6.15) ca și în cazul lovirii oblice fără frecare, este de forma (6.25). Pe baza simetriei, *Rahmatulin* trage concluzia că ea se reduce la

$$\lambda = 2 \cos \gamma \tag{6.29}$$

căci $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Înlocuind în prima relație (6.26), obținem

$$b = (b + u) \cos \gamma, \tag{6.30}$$

iar din prima relație (6.24) rezultă

$$v_0 = b \operatorname{tg} \gamma. \tag{6.31}$$

În cazul lovirii normale avem deci de rezolvat ecuațiile (6.29), (6.30) și (6.31).

e) **Lovirea oblică fără alunecare.** Dacă alunecarea lipsește, particulele firului din domeniile *I* și *II* trebuie să aibă aceeași viteză

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_0, \qquad v_1 = v_2 = v_0. \tag{6.32}$$

De aici rezultă că ecuațiile (6.8) și (6.14) sînt identic satisfăcute. În afară de aceasta, ecuațiile de legătură (6.15) și (6.16) nu trebuie să mai fie luate în considerare. Deci pentru rezolvarea problemei avem zece ecuații cu zece necunoscute. În acest caz, ecuațiile (6.3), (6.7), (6.18) și (6.20) rămîn valabile și servesc la determinarea lui b_1, ε_1, u_1 și γ_1.

Se poate considera și cazul limită cînd $\beta_1 = 0$, adică cazul lovirii longitudinale. Din (6.20) obținem

$$\gamma_1 = 0, \quad v_1 = \frac{T_1}{\rho_1' (b_1 + u_1)} - b_1$$

iar din (6.18) rezultă $v_1 = u_1$. Aceste rezultate sînt de asemenea datorite lui *Rahmatulin* [171].

f) **Cercetarea ecuației energiei.** Pentru rezolvarea problemei lovirii s-a folosit numai ecuația cantității de mișcare și condiția de continuitate a deplasării. Ele au fost sufieiente pentru rezolvarea

Scanned with OKEN Scanner

problemei. *Rahmatulin* își pune în continuare întrebarea dacă mișcarea astfel obținută satisface ecuația conservării energiei. După cum vom vedea mai jos, el a arătat că în cazul cînd tensiunea este funcțiune liniară de deformație, mișcarea obținută satisface ecuația conservării energiei. Totuși el atrage atenția că soluția găsită, în general, nu satisface ecuația conservării energiei, și anume ea este însoțită de o anumită pierdere a energiei.

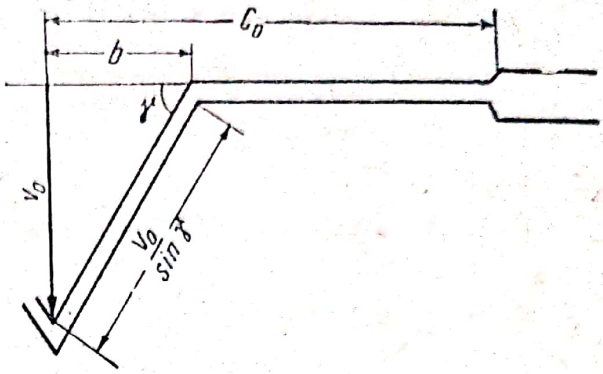

Fig. 47

Să considerăm cazul lovirii simetrice. Lucrul forțelor exterioare într-o unitate de timp, începînd de la începutul lovirii, este

$$A = T \sin\gamma \cdot v_0 \quad (6.33)$$

iar energia acumulată în fir în același timp unitar este

$$\mathcal{E} = \frac{v_0}{(1+\varepsilon)\sin\gamma}\frac{1}{2}E\varepsilon^2 + \frac{c_0 - b}{1+\varepsilon}\frac{1}{2}E\varepsilon^2 + \\ + \frac{1}{2}\frac{v_0}{(1+\varepsilon)\sin\gamma}\rho_0 v_0^2 + \frac{c_0 - b}{1+\varepsilon}\rho_0\frac{c_0^2\varepsilon^2}{2} \quad (6.34)$$

căci în acest caz $v_1 = v_0$ și $u = c_0\varepsilon$.

Folosindu-ne de ecuația (6.5), lucrul forțelor exterioare (6.33) se poate scrie sub forma

$$A = v_0 T \sin\gamma = v_0\frac{\rho_0}{1+\varepsilon}(b+u)\, v_0 = \frac{\rho_0 (b+u) v_0^2}{1+\varepsilon}. \quad (6.35)$$

Egalăm acum (6.34) și (6.35):

$$(b+u)v_0^2 = \frac{v_0}{\sin\gamma}\left(\frac{\varepsilon^2 c_0^2}{2} + \frac{v_0^2}{2}\right) + (c_0 - b)\left(\frac{\varepsilon^2 c_0^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 c_0^2}{2}\right). \quad (6.36)$$

Din fig. 47 și ținînd seama că din (6.30) și (6.31) rezultă

$$v_0^2 + b^2 = (b+u)^2 \quad (6.37)$$

obținem

$$\sin\gamma = \frac{v_0}{\sqrt{b^2 + v_0^2}} = \frac{v_0}{b+u}, \qquad u = c_0\varepsilon.$$

Introducînd în relaţia (6.36), în cele din urmă obţinem

$$\frac{\bar{b}+\varepsilon}{2}\bar{v}_0^2 = \frac{\bar{b}+\varepsilon}{2}\varepsilon^2 + (1-\bar{b})\varepsilon^2 \tag{6.38}$$

în care $\bar{b} = \frac{b}{c_0}$ şi $\bar{v}_0 = \frac{v_0}{c_0}$. Introducînd în această relaţie pe (6.17) scrisă sub forma $\bar{v}_0^2 = \varepsilon(2\bar{b}+\varepsilon)$, obţinem $\bar{b}^2 + 2\bar{b}\varepsilon = \varepsilon$, sau $(\bar{b}+\varepsilon)^2 = \varepsilon + \varepsilon^2 = \varepsilon(1+\varepsilon)$. Această relaţie este echivalentă cu (6.37) şi deci ea este satisfăcută. *Rahmatulin* trage deci concluzia că lucrul forţelor exterioare este egal cu energia, pentru firul în care există o relaţie liniară între tensiune şi deformaţie.

g) **Studiul propagării perturbaţiilor pornind de la ecuaţiile de mişcare ale firului.** În cele ce urmează vom presupune că mişcarea firului este de asemenea plană. Vom lua axa x dirijată de-a lungul firului, iar axa y dirijată perpendicular pe poziţia iniţială a firului. Notînd cu x şi y deplasările longitudinale şi respectiv transversale, ecuaţiile generale de mişcare ale firului plan sînt

$$\rho_0\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0}\left[\frac{T}{1+\varepsilon}\left(1-\frac{\partial x}{\partial s_0}\right)\right], \quad \rho_0\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0}\left[\frac{T}{1+\varepsilon}\frac{\partial y}{\partial s_0}\right]$$

unde s_0 este arcul iniţial pe fir. Să scriem aceste ecuaţii sub forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{T}{(1+\varepsilon)\rho_0}\frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2} + \frac{1+\dfrac{\partial x}{\partial s_0}}{\rho_0}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{T}{1+\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{T}{(1+\varepsilon)\rho_0}\frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2} + \frac{\dfrac{\partial y}{\partial s_0}}{\rho_0}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{T}{1+\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}.\end{aligned} \tag{6.39}$$

Deformaţia este dată de

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s_0}+1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_0}\right)^2} - 1. \tag{6.40}$$

Rahmatulin [171] introduce noile coordonate $\bar{x}$ şi $\bar{y}$, prin formulele: $x = v_0 t\,\bar{x}$, $y = v_0 t\,\bar{y}$, unde v_0 este viteza de lovire. Funcţiile $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ fiind adimensionale pot depinde numai de parametrii adimensionali $z = \frac{s_0}{v_0 t}$, $\frac{v_0}{c_i}$, β_0, unde c_i este o mărime de dimensiunea unei

viteze și depinde de funcția $T(\varepsilon)$. Vom avea deci

$$x = v_0 t\overline{x}(z) \qquad y = v_0 t\overline{y}(z)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s_0} = \frac{d\overline{x}}{dz} \qquad \frac{\partial y}{\partial s_0} = \frac{d\overline{y}}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2} = \frac{d^2\overline{x}}{dz^2}\frac{1}{v_0 t} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2} = \frac{d^2\overline{y}}{dz^2}\frac{1}{v_0 t}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_0\left(\overline{x} - z\frac{d\overline{x}}{dz}\right) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = v_0\left(\overline{y} - z\frac{d\overline{y}}{dz}\right)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = z^2\left(\overline{x} - z\frac{d\overline{x}}{dz}\right) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = z^2\left(\overline{y} - z\frac{d\overline{y}}{dz}\right).$$

Introducînd în (6.39) obținem

$$z^2\frac{d^2\overline{x}}{dz^2} = \frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+\varepsilon)}\frac{d^2\overline{x}}{dz^2} + \frac{1+\overline{x}'}{1+\varepsilon}\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+\varepsilon)}\right][(1+\overline{x}')\overline{x}'' + \overline{y}'\overline{y}''] \tag{6.41}$$

$$z^2\frac{d^2\overline{y}}{dz^2} = \frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+\varepsilon)}\frac{d^2\overline{y}}{dz^2} + \frac{\overline{y}'}{1+\varepsilon}\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+\varepsilon)}\right][(1+\overline{x}')\overline{x}'' + \overline{y}'\overline{y}''].$$

Ecuațiile (6.41) admit soluția banală $x'' = 0$, $y'' = 0$, adică

$$\frac{d\overline{x}}{dz} = \frac{\partial x}{\partial s_0} = c_1, \quad \frac{d\overline{y}}{dz} = \frac{\partial y}{\partial s_0} = c_2, \quad \frac{dx}{dt} = c_3, \quad \frac{dy}{dt} = c_4.$$

Aceste soluții corespund unei deformații constante și unei viteze constante. Ele nu diferă de soluțiile obținute în punctele precedente. Constantele c_1, c_2, c_3, c_4 pentru diferite porțiuni vor fi diferite și se determină din condițiile de compatibilitate dinamică.

În [173] *Rahmatulin* a căutat și soluții ale sistemului (6.41) care să fie diferite de cea banală.

Să introducem notația

$$U(\varepsilon) = \frac{T(\varepsilon)}{\rho_0 v_0^2(1+\varepsilon)}. \tag{6.42}$$

Pornind de la ideea că discontinuitățile propagabile, dacă există, se află printre caracteristicele sistemului (6.41), să calculăm determinantul caracteristic al acestui sistem. Obținem

$$\begin{vmatrix} U - z^2 + \dfrac{(1+\overline{x}')^2}{1+\varepsilon}\dfrac{dU}{d\varepsilon} & \dfrac{\overline{y}'(1+\overline{x}')}{1+\varepsilon}\dfrac{dU}{d\varepsilon} \\ \dfrac{\overline{y}'(1+\overline{x}')}{1+\varepsilon}\dfrac{dU}{d\varepsilon} & U - z^2 + \dfrac{\overline{y}'^2}{1+\varepsilon}\dfrac{dU}{d\varepsilon} \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltîndu-l obţinem

$$(U - z^2)\left[U - z^2 + (1 + \varepsilon)\frac{dU}{d\varepsilon}\right] = 0. \tag{6.43}$$

Există deci două posibilităţi. În primul rînd $z^2 = U(\varepsilon)$. Introducînd aceasta în (6.41) obţinem

$$(1 + \overline{x}')\frac{dU}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz} = 0, \qquad \overline{y}'\frac{dU}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz} = 0; \tag{6.44}$$

(6.44) admite trei soluţii:

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = 0; \qquad \frac{dU}{dz} = 0; \qquad \overline{y}' = 0, \qquad 1 + \overline{x}' = 0; \tag{6.45}$$

care contrazic faptul că $U = U(\varepsilon)$ şi $\varepsilon = \varepsilon(z)$. Le vom lăsa deci deoparte.

Să trecem acum la cea de a doua posibilitate ce rezultă din (6.43):

$$U - z^2 + (1 + \varepsilon)\frac{dU}{d\varepsilon} = 0. \tag{6.46}$$

Vom introduce aici pe U din (6.42) şi pe $z = \frac{s_0}{v_0 t}$. Obţinem

$$\left(\frac{s_0}{t}\right)^2 = \frac{T'(\varepsilon)}{\rho_0} = c^2(\varepsilon). \tag{6.47}$$

Deci de-a lungul dreptelor $\frac{s_0}{t} = \text{const.}$, viteza locală a sunetului este constantă. Soluţia (6.47) conduce la undele lui Riemann pentru mişcarea bidimensională a firului. Din (6.47) se poate deduce deformaţia ε ca funcţie de z. Să determinăm acum pe x şi y ca funcţii de z. Introducînd (6.46) în a doua ecuaţie (6.41), obţinem

$$\left\{(1 + \varepsilon)\overline{y}'' - \frac{\overline{y}'}{1 + \varepsilon}\left[\overline{x}''(1 + \overline{x}') + \overline{y}'\overline{y}''\right]\right\}\frac{dU}{d\varepsilon} = 0.$$

Pentru că $\frac{dU}{d\varepsilon} \neq 0$, din această relaţie şi din (6.40) rezultă în cele din urmă

$$\overline{y} = C_1(z + \overline{x}) + C_2. \tag{6.48}$$

Trecînd la coordonatele dimensionale, această relaţie devine

$$y = C_1(s_0 + x) + C_2 t. \tag{6.49}$$

De aici rezultă că forma firului în fiecare moment poate fi reprezentată prin segmente liniare. Se verifică imediat că dacă

(6.46) și (6.48) sînt satisfăcute, atunci și prima ecuație (6.41) este identic satisfăcută.

Din (6.46) rezultă deci o a doua soluție pentru problema propagării undelor în fire. *Rahmatulin* [173], particularizînd această soluție pentru cazul lovirii transversale a firului, a arătat că ea nu este satisfăcută pentru anumite cazuri particulare importante (oțel, aramă etc.). El trage deci concluzia că unica soluție posibilă este soluția banală pusă în evidență mai sus.

De problema propagării undelor de deformație constantă în fire ce se mișcă într-un plan s-au ocupat și *J. D. Cole, C. B. Dougherty* și *J. H. Huth* [34]. Ei consideră însă numai cazul firelor elastice. Se studiază atît propagarea undelor longitudinale cît și a celor transversale. Două ecuații de mișcare se referă: una la deplasările orizontale u și cealaltă la deplasările verticale v. Faptul că se caută soluția prin așa-numitele unde de deformație constantă revine la a presupune că atît $u(x, t)$ cît și $v(x, t)$ sînt funcții liniare de x și t. De aici rezultă că ecuațiile de mișcare sînt identic satisfăcute, căci toți parametrii care intervin în problemă sînt constanți. Aceasta ar putea să nu aibă loc numai pe liniile de discontinuitate. Deci și soluția propusă de autorii citați conduce la soluții banale pentru ecuațiile de mișcare.

Problema lovirii oblice a firului elastic, făcînd presupunerea simplificatoare că aria secțiunii transversale rămîne constantă, a fost considerată și de *F. O. Ringleb* [256].

h) **Stabilirea relației dinamice** $\sigma \sim \varepsilon$. Teoria de mai sus a lui *Rahmatulin* a fost aplicată de *H. A. Rahmatulin* și *G. S. Șapiro* [180] pentru stabilirea relației dinamice dintre deformație și tensiune la fire. Pentru aceasta ei au considerat numai cazul lovirii normale cu viteza constantă v_0. Trebuie să determinăm deci relația $T = T(\varepsilon)$.

Pentru aceasta se lovește firul cu viteza v_0 și se filmează mișcarea lui. Se obține deci experimental relația

$$v_0 = v_0(\gamma). \tag{6.50}$$

A doua relație (6.26) pentru deformații mici poate fi scrisă sub forma $T(\varepsilon) = \rho_0 (b + u)^2$. Utilizînd și ultima relație (6.26) precum și relațiile (6.30) și (6.31) obținem

$$T(\varepsilon) = \rho_0 \frac{v_0^2}{\sin^2 \gamma} = f(\gamma) \tag{6.51}$$

$$u = \varphi(\gamma) = \frac{(1 - \cos \gamma)\, v_0(\gamma)}{\sin \gamma} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} c(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{6.52}$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd pe (6.52) în raport cu γ, rezultă

$$\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{dT}{d\varepsilon}}\frac{d\varepsilon}{d\gamma}=\frac{d\varphi}{d\gamma}$$

iar din (6.51). rezultă

$$\frac{dT}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\gamma}=\frac{df(\gamma)}{d\gamma}.$$

Prin urmare

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{df(\gamma)}{d\gamma}\frac{d\varepsilon}{d\gamma}=\left(\frac{d\varphi}{d\gamma}\right)^2.$$

Înlocuind în cele din urmă expresiile lui f' și φ', obținem

$$\frac{d\varepsilon}{d\gamma}=\frac{(\cos\gamma-1)^2\,[v_0(\gamma)+v_0'\sin\gamma]^2}{2v_0(\gamma)\,[v_0'\sin^2\gamma-v_0\sin\gamma\cos\gamma]}. \tag{6.53}$$

Intregrînd pe (6.53) obținem o relație de forma

$$\varepsilon=\varepsilon(\gamma,\ K). \tag{6.54}$$

Din experiențe este însă cunoscută valoarea lui γ_s, unghiul corespunzător apariției deformațiilor plastice. Prin urmare obținem

$$\varepsilon_s=\varepsilon(\gamma_s,\ K). \tag{6.55}$$

Din (6.51) avem

$$E\varepsilon_s=\rho^*\frac{v_0^2(\gamma_s)}{\sin^2\gamma} \tag{6.56}$$

în care ρ^* este densitatea materialului după experiență.

Introducînd pe ε_s din (6.54), în care facem $\gamma=\gamma_s$, în (6.56) obținem încă o relație care împreună cu (6.56) determină pe ε_s și E. Introducînd aceste valori în (6.56) se determină constanta de integrare. În felul acesta, problema determinării diagramei dinamice $\sigma\sim\varepsilon$ se reduce la cuadraturi.

§ 2. LOVIREA TRANSVERSALĂ, CU VITEZĂ VARIABILĂ, A UNUI FIR FLEXIBIL

Problema lovirii transversale a unui fir flexibil, rectiliniu și nemărginit, cu un punct material de masă finită (deci viteza de lovire este variabilă) a fost considerat de *E. V. Reabova* [182]. Reabova a ținut seama și de influența mișcării firului asupra mișcării punctului.

Ca și *Rahmatulin*, *Reabova* presupune de la bun început o anumită succesiune în propagarea diferitelor perturbații. Astfel, de la început se presupune că în firul lovit se vor propaga întîi unda elastică longitudinală D, apoi undele lui Riemann longitudinale CD,

apoi unda de descărcare a lui Rahmatulin C și, în cele din urmă, unda transversală de șoc B_1 (fig. 48).

Să considerăm un sistem de axe fixe xOy, și un sistem mobil $\xi'\ O'\ \eta'$ legat de firul în mișcare. Originea O' se ia în punctul lovit al firului, axa $O'\ \xi'$ este luată de-a lungul firului în poziția pe care ar lua-o, dacă el ar fi lovit cu viteza constantă v_0 egală cu valoarea inițială a vitezei variabile $v(t)$. Axa $O'\eta'$ se ia perpendiculară pe prima. Fie ξ_1 distanța luată pe axa Ox, de la punctul de lovire pînă la elementul I; ξ_2 aceeași distanță pînă la elementul II; ε_0 deformația în cazul lovirii cu viteză constantă; T_2, ε_2 și T, ε — tensiunea și deformația firului respectiv în domeniile II și III; T_m și ε_m — tensiunea și deformația pe unda lui Rahmatulin, γ — unghiul dintre direcția unui element de fir din domeniul III în cazul lovirii cu viteză constantă și direcția aceluiași element în cazul lovirii cu viteză variabilă.

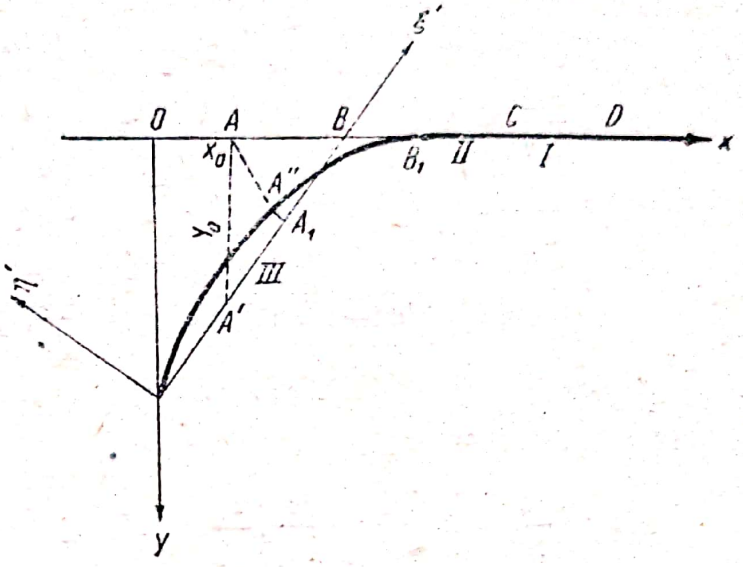

Fig. 48

În domeniul I, ca și în cazul barei, ecuația de mișcare va fi

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial s_0^2}. \tag{6.57}$$

În domeniul de descărcare II, ea este

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial s_0^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial T_m}{\partial s_0} - c_0^2 \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial s_0}. \tag{6.58}$$

Pentru stabilirea ecuațiilor în domeniul III, să notăm cu: x_0 — abscisa punctului A, y_0 — ordonata lui A', distanța $A'A_1$ cu ξ și A_1A'' cu η. Coordonata lagrangeană a lui A fiind s_0, atunci $O'A' = s_0\,(1 + \varepsilon_0)$ și coordonatele lui A'' sînt

$$\xi' = \xi + s_0(1 + \varepsilon_0) \tag{6.59}$$

$$\eta' = \eta. \tag{6.60}$$

Distanța BB_1 va fi notată cu $\tilde{\xi}_2$. *Reabova* consideră că pentru scrierea ecuațiilor în domeniul III și pentru determinarea condițiilor la

limită, pătratele și puterile superioare ale deplasărilor ξ, η, $\tilde{\xi}_2$ și derivatele lor se pot neglija în comparație cu deplasările lor în cazul lovirii cu viteză constantă. Această neglijare se poate face deoarece viteza de lovire se schimbă foarte puțin.

Să scriem ecuațiile de mișcare proiectate pe axele mobile. Asupra unui element ds de fir vor acționa forțele: tensiunile T și $T + \delta T$, rezistența mediului qds și forța de inerție a sistemului $\rho v' ds$. Deci ecuațiile de mișcare sînt

$$\rho\, ds \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t} = \delta\,(T \cos\gamma) + v'\,\rho \sin\gamma_0\, ds \tag{6.61}$$

$$\rho\, ds \frac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2} = -\delta\,(T \sin\gamma) + v'\rho \cos\gamma_0 \cdot ds + q\, ds. \tag{6.62}$$

Ținînd seama de $\rho\, ds = \rho_0\, ds_0$, $\cos\gamma = \frac{\partial \xi}{\partial s}$, $\sin\gamma = \frac{\partial \eta}{\partial s}$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\partial \xi}{\partial s_0}$ și de (6.59) și (6.60), ecuațiile de mișcare se scriu, neglijînd mărimi de ordin superior, sub forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s_0^2} + \frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{T_m}{\rho_0} - c_0^2\, \varepsilon_m\right) + v' \sin\gamma_0 \tag{6.63}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial s_0^2} + \frac{1}{1+\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{T_m}{\rho_0} - c_0^2\, \varepsilon_m\right) \frac{\partial \xi}{\partial s_0} + v' \cos\gamma_0 + \frac{q\,(1+\varepsilon_0)}{\rho} \tag{6.64}$$

unde

$$\lambda = \frac{T_m - E\varepsilon_m + E\varepsilon_0}{\rho_0\,(1+\varepsilon_0)}. \tag{6.65}$$

Pentru găsirea condițiilor la limită, pentru domeniile *I*, *II* și *III*, *Reabova* utilizează metoda lui *Șapiro* [194] de asociere la planul (s_0, t) a planului $\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial s_0}\right)$. Se utilizează în acest scop formulele (1.65) și (1.71). De asemenea se utilizează două ecuații ale cantității de mișcare așa cum au fost scrise de *Rahmatulin* [171] (vezi mai sus) și ecuația de mișcare a punctului material sub forma

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{2\,(T_m - E\varepsilon_m + E\varepsilon_0)}{1+\varepsilon_0} \frac{\partial \eta}{\partial s_0}.$$

Pentru rezolvarea ecuațiilor, *Reabova* scrie ecuațiile caracteristicelor și condițiile caracteristice pentru fiecare domeniu în parte. Soluția problemei este dată sub formă aproximativă, similar cu

Scanned with OKEN Scanner

metoda dată de *Șapiro* pentru bare. Problema este ceva mai complicată datorită intervenției în plus a undei de șoc.

De problema lovirii firului cu viteză variabilă s-a ocupat și *H. A. Rahmatulin* [177], dar această lucrare n-am putut-o găsi.

§ 3. MIȘCAREA FIRULUI ÎN SPAȚIU

a) **Ecuațiile.** În cele ce urmează vom examina [43] propagarea undelor în fire nemărginite, cînd ele au o mișcare oarecare în spațiu. În afară de această mișcare, la momentul $t = 0$, asupra unui punct al firului acționăm astfel încît provocăm în fir deformații plastice. Pentru aceasta trebuie să fie cunoscută legea de mișcare a acestui punct și legea de variație a tensiunii sau a deformației în acest punct. În particular se poate considera problema lovirii firului într-un singur punct al său. Relația dintre tensiune și deformație este dată sub formă întreagă

$$T = T(\varepsilon) \tag{6.66}$$

sau diferențială

$$dT = f(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{6.67}$$

Întrucît în aceste relații nu intervine și viteza de deformare, considerațiile făcute pornind de la relațiile (6.66) și (6.67) sînt valabile numai pentru acele materiale sau acele experiențe dinamice, în care viteza de deformare se poate neglija. În paragraful următor vom lua în considerare și viteza de deformare. În acest caz calculele trebuie refăcute în întregime. O relație de tipul (6.66) pentru studiul propagării undelor în fire elasto-plastice a fost considerată și de *J. W. Craggs* [39].

Funcțiile care intervin în (6.66) și (6.67) sînt deocamdată presupuse oarecare (totuși continue și derivabile), iar ulterior vom da cîteva exemple precizînd aceste funcții.

Ecuațiile de mișcare ale firului flexibil sînt

$$\frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{T}{1+\varepsilon}\frac{\partial x}{\partial s_0}\right) - \rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + X = 0 \qquad (x, y, z)^{1)} \tag{6.68}$$

iar alungirea relativă este dată de

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s_0}\right)^2} - 1. \tag{6.69}$$

---

[1]) Paranteza (x, y, z) înseamnă că avem un sistem de trei ecuații, dintre care am scris doar pe prima referitoare la x. Celelalte se obțin prin permutări circulare.

Scanned with OKEN Scanner

În paragraful precedent se presupunea de la început o anumită succesiune în propagarea diferitelor unde în fir. În cele ce urmează ne propunem să vedem care este ordinea propagării diferitelor perturbații în fir, în funcție de proprietățile mecanice ale materialului respectiv, reflectate în expresia funcțiilor (6.66) sau (6.67). Fronturile eventualelor unde propagabile în fir se vor găsi printre caracteristicele ecuațiilor de mișcare [71], [128], [142], [206]. Pentru calcularea acestor caracteristice vom pune ecuațiile (6.68) și (6.69) sub forma

$$\frac{\partial x}{\partial s_0}\frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2}+\frac{\partial y}{\partial s_0}\frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2}+\frac{\partial z}{\partial s_0}\frac{\partial^2 z}{\partial s_0^2}-(1+\varepsilon)\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}=0,$$

$$\frac{T}{1+\varepsilon}\frac{\partial^2 x}{ds_0^2}-\rho_0\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{(1+\varepsilon)\dfrac{dT}{d\varepsilon}-T}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial x}{\partial s_0}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}+X=0. \qquad (x,y,z) \tag{6.70}$$

Să notăm cu $V(s_0, t) = 0$ curba de discontinuitate căutată. Aceasta este o curbă pe suprafața generată de fir în mișcare și pe care coordonatele sînt s_0 și t. Caracteristicele (curbele de discontinuitate) sistemului (6.70) sînt date de un determinant, care dezvoltat dă

$$(1+\varepsilon)\frac{\partial V}{\partial s_0}\left[\frac{T}{1+\varepsilon}\left(\frac{\partial V}{\partial s_0}\right)^2-\rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]\left[\frac{dT}{d\varepsilon}\left(\frac{\partial V}{\partial s_0}\right)^2-\rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]=0. \tag{6.71}$$

Sînt de considerat deci mai multe cazuri. Vom observa totuși de la început că trebuie exclus, ca imposibil din punct de vedere fizic, cazul $\varepsilon = -1$. De asemenea nu vom considera cazul $\frac{\partial V}{\partial s_0} = 0$. Aceasta corespunde cazului cînd discontinuitatea afectează simultan toate punctele firului (dacă $\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$) sau cazului punctelor fixe ale firului (dacă și $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$). De asemenea un alt caz care nu va fi considerat este cazul discontinuităților staționare cînd $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ dar $\frac{\partial V}{\partial s_0} \neq 0$.

Toate aceste cazuri degenerate sînt însă posibile și pot apărea în mișcarea firului. În cele ce urmează ne vom ocupa numai de unde propagabile, a căror viteză este finită.

Scanned with OKEN Scanner

Să notăm cu α, β, γ, δ coeficienții de salt corespunzători, respectiv, derivatelor lui x, y, z, ε. Condițiile de compatibilitate dinamică sînt atunci

$$\frac{\partial V}{\partial s_0}\left[\frac{\partial x}{\partial s_0}\frac{\partial V}{\partial s_0}\alpha+\frac{\partial y}{\partial s_0}\frac{\partial V}{\partial s_0}\beta+\frac{\partial z}{\partial s_0}\frac{\partial V}{\partial s_0}\gamma-(1+\varepsilon)\,\delta\right]=0,$$

$$\left[\frac{T}{1+\varepsilon}\left(\frac{\partial V}{\partial s_0}\right)^2-\rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]\alpha+\frac{(1+\varepsilon)\frac{dT}{d\varepsilon}-T}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial x}{\partial s_0}\frac{\partial V}{\partial s_0}\delta=0. \quad (x,y,z) \tag{6.72}$$

Să considerăm acum diferitele cazuri posibile.

b) **Undele transversale.** Un prim caz posibil ce rezultă din (6.71) este

$$\sqrt{\frac{T}{\rho_0(1+\varepsilon)}}\frac{\partial V}{\partial s_0}\pm\frac{\partial V}{\partial t}=0. \tag{6.73}$$

Aceasta este ecuația unei perechi de unde (directe și inverse) propagabile, pe care le vom însemna cu indicele I. Vitezele lor de propagare sînt

$$c_{\mathrm{I}}=\frac{\frac{\partial V}{\partial t}}{\frac{\partial V}{\partial s_0}}=\mp\sqrt{\frac{T}{\rho_0(1+\varepsilon)}}. \tag{6.74}$$

Vom observa că viteza este constantă dacă

$$T=T_0(1+\varepsilon) \tag{6.75}$$

unde T_0 este un factor de proporționalitate constant. Vom presupune deocamdată că relația

$$(1+\varepsilon)\frac{dT}{d\varepsilon}-T=0 \tag{6.76}$$

nu are loc în nici un punct al curbei $T\sim\varepsilon$. Vom arăta mai jos ce se întîmplă cînd această relație este realizată.

Deci dacă (6.76) nu este satisfăcută, ultimele trei relații din (6.72) duc neapărat la concluzia că $\delta=0$, și deci pe aceste unde $\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}$ este continuu. Prima relație (6.72), în care ținem seama că $\delta=0$ și pe care o raportăm la coordonata actuală s de pe fir, devine $\frac{\partial x}{\partial s}\alpha+\frac{\partial y}{\partial s}\beta+\frac{\partial z}{\partial s}\gamma=0$. De aici rezultă că undele de tipul I sînt transversale. Pe aceste unde sînt discontinue derivatele de ordinul

Scanned with OKEN Scanner

al doilea ale coordonatelor. Alungirea specifică ε este continuă împreună cu derivatele sale (căci $\delta = 0$). Deci undele transversale se referă la forma firului, ele nu provoacă alungiri propagabile.

c) **Undele longitudinale.** Al doilea tip de unde (pe care le vom nota cu II) ce poate exista în mișcarea firului perfect flexibil, și care rezultă din (6.71), este cea care satisface relația

$$\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{dT}{d\varepsilon}}\frac{\partial V}{\partial s_0} \pm \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{6.77}$$

În acest caz vitezele de propagare sînt

$$c_{II} = \mp \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{dT}{d\varepsilon}}. \tag{6.78}$$

Viteza este constantă dacă

$$\frac{dT}{d\varepsilon} = \text{const}, \tag{6.79}$$

adică atunci cînd porțiunea corespunzătoare a diagramei $T \sim \varepsilon$ este un segment de dreaptă.

Pentru acest al doilea tip de unde, condițiile de compatibilitate dinamică (6.72) devin

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial s_0}\left[\frac{\partial x}{\partial s_0}\frac{\partial V}{\partial s_0}\alpha + \frac{\partial y}{\partial s_0}\frac{\partial V}{\partial s_0}\beta + \frac{\partial z}{\partial s_0}\frac{\partial V}{\partial s_0}\gamma - (1+\varepsilon)\delta\right] = 0 \\
&\frac{\partial V}{\partial s_0}\left[\frac{T}{1+\varepsilon} - \frac{dT}{d\varepsilon}\right]\left[\frac{\partial V}{\partial s_0}\alpha - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial x}{\partial s_0}\delta\right] = 0. \quad (x, y, z)
\end{aligned} \tag{6.80}$$

Presupunînd mereu că (6.76) nu este satisfăcută, ultimele trei relații (6.80) se pot scrie, după raportarea lor la coordonata actuală s, sub forma

$$\frac{\alpha}{\frac{\partial x}{\partial s}} = \frac{\beta}{\frac{\partial y}{\partial s}} = \frac{\gamma}{\frac{\partial z}{\partial s}} = \frac{\delta}{(1+\varepsilon)\frac{\partial V}{\partial s_0}}. \tag{6.81}$$

Deci undele de tipul II sînt longitudinale. Din (6.81) și (6.80) rezultă că trebuie neapărat să avem $\delta \neq 0$, căci altfel toți ceilalți coeficienți de salt ar fi nuli, ceea ce este imposibil. Rezultă că pe undele de tipul II avem discontinuități propagabile de ordinul întîi referitor la alungirea specifică, dar și discontinuități de ordinul al doilea referitor la coordonate. Deci aceste unde pot duce la gîtuiri propagabile ale firului.

Scanned with OKEN Scanner

e) **Cîteva observaţii referitoare la viteze** [44]. Să revenim acum la relaţia (6.76). Ea reprezintă, în cazul materialelor consolidabile, ecuaţia unei drepte ce trece prin punctul (—1,0) în planul (T, ε) şi este tangentă la curba $T \sim \varepsilon$ (fig. 49). În cele ce urmează, în diagramele $T \sim \varepsilon$ vom avea de considerat cîteodată tensiunea adevărată (adică efortul raportat la secţiunea actuală) sau tensiunea relativă (adică efortul raportat la secţiunea iniţială a firului). Cîteodată, cînd prin trecerea frontului undelor plastice, gîtuirea firului este mică, cele două tensiuni sînt practic egale.

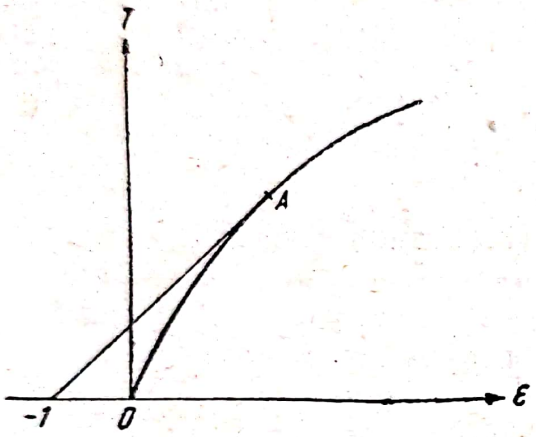

Fig. 49

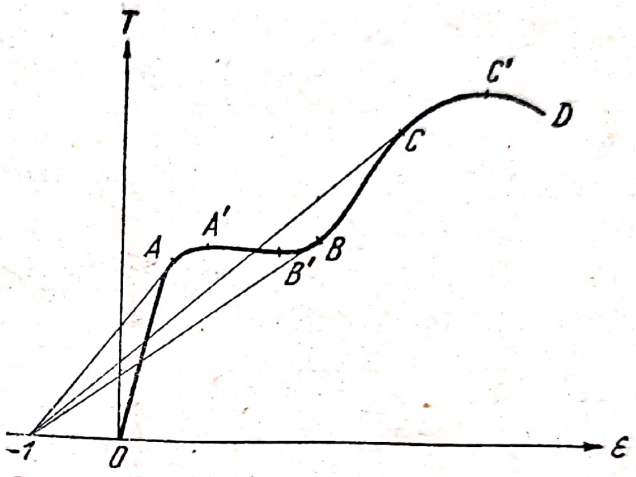

Fig. 50

Să considerăm că, în general, curba tensiune adevărată—deformaţie este de forma celei din fig. 50. Pentru asemenea diagrame există trei drepte tangente la curba $T \sim \varepsilon$ şi care trec prin punctul (—1,0). Dacă concavitatea curbei $T \sim \varepsilon$ se schimbă de mai multe ori, pot exista chiar mai multe asemenea drepte. Împărţind acum curba $T \sim \varepsilon$ în porţiuni avem

— în OA şi BC: $$(1 + \varepsilon)\frac{dT}{d\varepsilon} > T$$

— în AB şi CD: $$(1 + \varepsilon)\frac{dT}{d\varepsilon} < T$$

— în punctele A, B, C: $$(1 + \varepsilon)\frac{dT}{d\varepsilon} = T.$$

Să comparăm acum vitezele de propagare (6.74) şi (6.78). În primul rînd, din consideraţiile de la punctele precedente rezultă că, într-un fir flexibil, unicele unde propagabile sînt cele puse în evidenţă mai sus, şi că unicele viteze de propagare posibile sînt tocmai cele date de (6.74) şi (6.78). Din inegalităţile de mai sus rezultă că în

OA și BC: $|c_I| < |c_{II}|$, adică undele transversale se propagă mai încet decît cele longitudinale. În porțiunile AB și CD de pe diagrama $T \sim \varepsilon$, $|c_I| > |c_{II}|$, deci undele transversale se propagă mai repede decît cele longitudinale. În sfîrșit, în punctele A, B și C: $|c_I| = |c_{II}|$ și deci ambele unde se propagă cu aceeași viteză.

Vom atrage însă atenția, că de fapt pe porțiunea palierului orizontal $A'B'$, pentru că $\frac{dT}{d\varepsilon} = 0$, undele longitudinale nu se mai propagă. Este interesant de remarcat că undele longitudinale pot din nou să se propage, începînd cu acele secțiuni ale firului, care sînt în stadiul de tensiune corespunzătoare punctului B'. Dacă materialul firului este desconsolidabil, adică dacă începînd din punctul A' diagrama este descrescătoare, unda longitudinală nu mai există, căci $\frac{dT}{d\varepsilon} < 0$. Ea reîncepe însă să se propage, îndată ce diagrama redevine orizontală.

Dacă tensiunea la capătul firului crește monoton, tabloul propagării undelor longitudinale și transversale în fire a căror diagramă $T \sim \varepsilon$ este de tipul celei din fig. 50, este următorul: inițial (cînd T este încă mic) undele longitudinale se propagă mai repede decît cele transversale. Pe măsură ce deformația crește, c_I crește iar c_{II} scade. În punctul A cele două viteze sînt egale. Dincolo de acest punct, unda transversală se propagă mai repede și există deci posibilitatea ca într-o anumită secțiune a firului unda transversală să ajungă unda longitudinală. În funcție de condițiile inițiale ce provoacă cele două tipuri de unde, precum și în funcție de diagrama $T \sim \varepsilon$, această suprapunere a undelor poate să aibă loc numai în cîteva puncte izolate ale diagramei $T \sim \varepsilon$ sau chiar pe un întreg palier al acestei curbe. Viteza undei longitudinale scade treptat pînă la zero în punctul A', iar apoi pe porțiunea $A'B'$ ea nu se mai propagă. Pe această porțiune se propagă numai unda transversală. Dacă tensiunea devine din nou crescătoare (aceasta poate să aibă loc simultan în mai multe secțiuni ale firului), undele longitudinale încep să se propage din nou, cu o viteză care crește începînd de la zero. Pe porțiunea $B'C'$ la început c_{II} este mai mică decît c_I, apoi ea este egală cu c_I în B și apoi mai mare decît c_I pe porțiunea BC. Pe această porțiune, c_{II} este întîi crescătoare și apoi descrescătoare, devenind din nou egală cu c_I în punctul C. De aici c_{II} scade pînă la zero în C', unde unda longitudinală încetează din nou de a se mai propaga.

De remarcat că dacă în firul supus experienței, starea de tensiune marcată de punctul B' este atinsă simultan în mai multe secțiuni ale lui (ceea ce se poate întîmpla datorită inegalității grosimii firului), atunci undele longitudinale (deci eventualele gîtuituri) pot să

Scanned with OKEN Scanner

apară simultan și să se propage începînd de la toate aceste secțiuni. Dacă o asemenea stare de tensiune a apărut într-o altă secțiune, decît cea de la capăt, unda longitudinală apărută aici se va propaga în ambele direcții. Deci, începînd din punctul B' există posibilitatea ca în fir să se propage, în ambele direcții, mai multe unde longitudinale. Pe de altă parte, posibilitatea apariției undelor longitudinale începînd de la anumite secțiuni ale firului, ce nu sînt secțiuni asupra cărora se acționează direct prin forțe sau viteze exterioare, nu există decît pentru materialele a căror diagramă $T \sim \varepsilon$ prezintă un palier orizontal, oricît de scurt ar fi el. Acest palier ar putea eventual să se reducă la un punct.

Există posibilitatea ca la unele diagrame $T \sim \varepsilon$ să existe mai multe paliere orizontale. În acest caz fiecare din ele indică, eventual, începutul propagării unor noi gîtuiri în fir.

Revenind la presupunerile făcute de *Rahmatulin* și *Reabova*, referitoare la ordinea de propagare a undelor în fir, este clar că considerațiile lor se referă la acele materiale sau porțiuni ale curbei $T \sim \varepsilon$ în care undele longitudinale se propagă mai repede decît cele transversale.

Referitor la punctele A, B și C, am atras atenția că pentru starea de tensiune și deformație reprezentată prin aceste puncte, ambele unde se propagă cu aceeași viteză. Această situație poate exista pentru majoritatea materialelor numai într-un număr finit de puncte de pe curba $T \sim \varepsilon$. Dacă în plus mai este satisfăcută și relația (6.79), atunci ambele viteze, rămînînd egale, sînt și constante

$$|c| = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \tag{6.82}$$

T_0 fiind de obicei chiar limita de fluiditate pentru materialul respectiv.

Vom observa că există unele materiale, dintre polimerii înalți (de exemplu nylon) pentru care graficul tensiune adevărată—deformație posedă un palier destul de lung (în unele cazuri pot exista mai multe asemenea paliere) ce poate fi aproximat cu o dreaptă trecînd prin punctul (—1,0) din fig. 50 [149]. Ecuația acestei drepte este chiar (6.76) în care coeficientul unghiular este constant și egal cu limita de fluiditate. Pentru materialele de acest tip, pe palierul amintit cele două tipuri de unde se propagă cu viteze egale și constante date de (6.82). Imediat ce deformația a atins valoarea maximă corespunzătoare limitei de fluiditate, $\frac{dT}{d\varepsilon}$ crește și deci vitezele nu mai sînt constante. Unda longitudinală se propagă de acum încolo mai repede decît cea transversală. Alegînd în mod convenabil condițiile la limită, este evident că pe palierul pe care

$\frac{dT}{d\varepsilon} = \text{const}$, cele două tipuri de unde ar putea să se suprapună: fronturile ambelor unde ar putea afecta mereu în cursul propagării aceeași secțiune a firului.

Mai mulți autori (*Nadai* [149], *Miklowitz* [138]) au observat experimental că firele de nylon supuse întinderii posedă proprietatea că la un moment dat, pentru o anumită valoare a tensiunii, apar undeva în fir una sau mai multe gîtuiri. Spre deosebire de oțelul moale, cu care nylonul are totuși unele asemănări din punct de vedere mecanic, aceste gîtuiri nu continuă să se îngusteze, ci se propagă de-a lungul întregului fir cu viteză constantă (6.82). Acesta este fenomenul de cristalizare a nylonului care mărește mult rezistența lui și care confirmă posibilitatea propagării cu viteză constantă a undelor longitudinale pe un întreg palier de pe curba $T \sim \varepsilon$. Este posibil ca într-un același fir să se propage simultan, pornind de la mai multe puncte, mai multe gîtuiri care se propagă în ambele direcții. Această proprietate nu o posedă numai nylonul. Aceeași proprietate o posedă și multe alte fire artificiale (v. [136] și bibliografia indicată în această lucrare). Toate aceste rezultate privind firele artificiale au fost obținute pe cale experimentală. Ele confirmă raționamentele de mai sus.

f) **Soluția ecuațiilor.** Pentru a rezolva complet problema, adică pentru a găsi distribuția de tensiuni, deformații și viteze, cînd sînt date condițiile de la capătul firului, trebuie rezolvat sistemul (6.70). Aceasta se poate face cu ajutorul metodei caracteristicelor. Pentru aceasta vom rezolva în primul rînd sistemul (6.70) în raport cu derivatele de ordin maxim ale coordonatelor și ale deformației.

Vom utiliza notațiile

$$x_t = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad x_{s_0} = \frac{\partial x}{\partial s_0} \qquad (x,\ y,\ z)$$

precum și

$$\xi = \rho_0 \left[dx_t \frac{ds_0}{dt} - dx_{s_0} \right] \frac{1}{dt} - X$$

$$\eta = \rho_0 \left[dy_t \frac{ds_0}{dt} - dy_{s_0} \right] \frac{1}{dt} - Y$$

$$\zeta = \rho_0 \left[dz_t \frac{ds_0}{dt} - dz_{s_0} \right] \frac{1}{dt} - Z.$$

La sistemul (6.70) vom mai adăuga și următoarele șase relații

$$\left.\begin{aligned} dx_{s_0} &= \frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0} ds_0 + \frac{\partial x_{s_0}}{\partial t} dt \\ dx_t &= \frac{\partial x_t}{\partial s_0} ds_0 + \frac{\partial x_t}{\partial t} dt \end{aligned}\right\} \qquad (x,\ y,\ z) \qquad (6.83)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care creşterile sînt luate de-a lungul caracteristicelor. Obţinem uşor:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2} = \frac{\left\{\xi (1+\varepsilon)^2 - x_{s_0}\left[\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}\right]\right\}\left[(1+\varepsilon)\frac{dT}{d\varepsilon} - T\right]}{(1+\varepsilon)^2\left[\frac{T}{1+\varepsilon} - \rho_0\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\right]\left[\frac{dT}{d\varepsilon} - \rho_0\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\right]} + \\ + \frac{\xi}{\frac{dT}{d\varepsilon} - \rho_0\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2} \tag{6.84}$$

şi alte două relaţii similare pentru derivatele $\frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2}$ şi $\frac{\partial^2 z}{\partial s_0^2}$. De aici rezultă că pe undele transversale, pe care avem

$$\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = \frac{T}{\rho_0 (1+\varepsilon)} \tag{6.73}$$

relaţiile diferenţiale satisfăcute pe caracteristice sînt

$$\frac{\xi}{x_{s_0}} = \frac{\eta}{y_{s_0}} = \frac{\zeta}{z_{s_0}}. \tag{6.73'}$$

(Am presupus că relaţia (6.76) nu este satisfăcută decît în puncte izolate).

Pe undele longitudinale, pe care este satisfăcută relaţia

$$\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = \frac{\frac{dT}{d\varepsilon}}{\rho_0} \tag{6.77}$$

relaţia diferenţială este

$$\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0} = 0 \tag{6.77'}$$

căci pe (6.77) avem

$$\frac{T}{1+\varepsilon} - \rho_0\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = -\frac{(1+\varepsilon)\frac{dT}{d\varepsilon} - T}{1+\varepsilon}.$$

Tot din sistemul (6.70) rezultă

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} = \frac{1}{(1+\varepsilon)\left[\frac{dT}{d\varepsilon} - \rho_0\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\right]}\left(\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}\right). \tag{6.85}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (6.84) și (6.85) rezultă din nou că pe undele longitudinale sînt discontinue atît derivatele de ordinul al doilea ale coordonatelor cît și derivata $\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}$. Pe frontul undelor transversale, sînt discontinue însă numai derivatele de ordinul al doilea ale coordonatelor, deci undele transversale nu provoacă alungiri propagabile.

Pentru rezolvarea completă a problemei trebuie integrate de-a lungul caracteristicelor, relațiile diferențiale corespunzătoare, ținînd seamă de condițiile de la capătul firului, de relațiile (6.83) și eventual de unele condiții suplimentare date pe fronturile undelor. Relațiile (6.83) se pot folosi ținînd seama că diferențialele dx_{s_0}, dx_t etc., sînt continue de o parte și alta a fronturilor de undă. Totuși integrarea numerică a sistemului considerat este dificilă în cazul general.

Trebuie să mai observăm că vitezele de propagare ale celor două tipuri de unde pot, pe anumite porțiuni ale curbei $T \sim \varepsilon$, să devină crescătoare cînd deformațiile la capătul firului sînt crescătoare. Deci există posibilitatea apariției undelor de șoc longitudinale sau transversale în mișcarea firelor.

g) **Exemple.** Considerațiile din punctele precedente pot fi ușor particularizate pentru fire din diferite materiale. Vom face mai jos numai cîteva observații privind caracteristicele fenomenului de propagare în cîteva tipuri de materiale [44].

1°. *Fire perfect plastice.* Pentru firele perfect plastice, relația $T \sim \varepsilon$ este de forma (T — tensiunea relativă):

$$T = \text{const.}$$

Este clar că în firele de acest tip, undele longitudinale de încărcare degenerează.

În ceea ce privește undele transversale de încărcare, ele se propagă în aceste fire cu viteza dată de (6.74) în care $T = \text{const.}$ Viteza lor de propagare variază totuși, depinzînd de mărimea alungirii relative ε. Cu cît ε va fi mai mare, cu atît unda respectivă se va propaga mai încet. Se poate face și o reprezentare grafică a acestor unde în planul (s_0, t), dacă este dată legea de mișcare a punctului $s_0 = 0$ a firului și distribuția deformațiilor în fir [44].

Pentru rezolvarea completă a problemei trebuie integrate ecuațiile (6.73′) de-a lungul caracteristicelor (6.73) ținînd seamă de (6.83) și de distribuția deformațiilor. În general această integrare nu se poate face decît numeric.

Scanned with OKEN Scanner

2°. *Fire consolidabile liniar.* În cazul firelor consolidabile liniar, relaţia dintre tensiune şi alungire este

$$T = T_s + E_1 (\varepsilon - \varepsilon_s).$$

În aceste fire ambele tipuri de unde se propagă cu viteze finite. Cele transversale se propagă cu viteza $c_I = \sqrt{\frac{T_s + E_1 (\varepsilon - \varepsilon_s)}{\rho_0 (1 + \varepsilon)}}$ iar cele longitudinale cu viteza constantă $c_{II} = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_0}}$. Relaţia de ordonare dintre c_I şi c_{II} depinde de mărimea modulului de consolidare E_1 precum şi de aceea a tensiunii T_s şi a deformaţiei ε_s corespunzătoare punctului de fluiditate. Astfel dacă $E_1 > \frac{T_s}{\varepsilon_s + 1}$, undele transversale se propagă mai repede decît cele longitudinale. Dacă $E_1 < \frac{T_s}{\varepsilon_s + 1}$ situaţia se inversează. Pentru $E_1 = \frac{T_s}{\varepsilon_s + 1}$ cele două tipuri de unde se propagă cu viteze egale şi constante. Această egalitate poate eventual, pentru anumite materiale, să fie satisfăcută pentru întreaga porţiune a diagramei $T \sim \varepsilon$ corespunzătoare deformaţiilor plastice.

3°. *Fire consolidabile exponenţial.* Pentru materiale consolidabile exponenţial, relaţia dintre tensiune şi alungirea relativă este de forma

$$T = k\varepsilon^{\eta}$$

unde k şi η sînt constante ($\eta < 1$). Şi în acest caz ambele tipuri de unde sînt propagabile. Undele transversale se propagă cu viteza $c_I = \sqrt{\frac{k\eta}{\rho_0 (1 + \varepsilon)}}$. Această viteză creşte de la zero (pentru $\varepsilon = 0$) pînă la valoarea ei maximă atinsă pentru $\varepsilon = \frac{1}{1 - \eta}$ şi apoi scade din nou. Undele longitudinale se propagă cu viteza $c_{II} = \sqrt{\frac{k}{\rho_0}\varepsilon^{\eta - 1}}$, care este mereu descrescătoare, pe măsură ce ε creşte.

Pentru toate tipurile de fire, în care se propagă cu viteză finită ambele tipuri de unde, rezolvarea completă a problemei cînd se dau condiţiile la extremitatea firului şi eventual distribuţia iniţială a deformaţiilor în fir, este mult mai anevoioasă şi, în general, nu se poate face decît numeric.

4°. *Fire elastice.* Pentru materialele plastice, ce nu sînt plastic rigide, atît în domeniul de încărcare cît şi în domeniul de descărcare

Scanned with OKEN Scanner

vor interveni și unde elastice. Pentru încărcare, în porțiunea elastică vom pune

$$T = E\varepsilon$$

iar pentru descărcare

$$T = T_m + E\,(\varepsilon - \varepsilon_m)$$

unde T_m și ε_m sînt valorile maxime ale tensiunii și deformației în secțiunea respectivă.

În firele elastice [41] undele longitudinale se propagă cu viteza constantă $c_{II} = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$. Ea este mai mare decît viteza $c_I = \sqrt{\frac{E\varepsilon}{\rho_0\,(1+\varepsilon)}}$ $\left(\text{sau respectiv } c_I = \sqrt{\frac{T_m + E(\varepsilon - \varepsilon_m)}{\rho_0\,(1+\varepsilon)}}\right)$ a undelor transversale. Această viteză, chiar pentru firele elastice, este variabilă și depinde de mărimea deformației ε. Deci în planul (s_0, t) fronturile acestor unde transversale nu vor mai fi totdeauna reprezentate prin niște drepte, ca la undele elastice longitudinale. Este interesant de remarcat că viteza c_I crește de la zero $\left(\text{sau respectiv de la } \sqrt{\frac{T_m - E\varepsilon_m}{\rho_0}}\right)$ pentru $\varepsilon = 0$, tinzînd către valoarea constantă $\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$, pentru $\varepsilon \to \infty$.

§ 4. INFLUENȚA VITEZEI DE ALUNGIRE

a) **Ecuațiile.** În paragraful precedent, am considerat problema propagării undelor în fire nemărginite, al căror material satisface o relație între tensiune și alungire de forma (6.66) sau (6.67). În aceste relații nu intervine viteza de alungire. Există însă foarte multe materiale (de exemplu, diferite tipuri de fire artificiale) pentru care, cel puțin în anumite domenii de variație ale alungirii, influența vitezei de alungire nu poate fi neglijată. În aceste cazuri trebuie să considerăm, în afară de caracteristicile elastice sau plastice ale materialului respectiv, și viscozitatea lui. Propagarea numai a perturbațiilor longitudinale în fire de acest tip se poate studia cu metodele utilizate pentru bare (cap. II).

În cele ce urmează, ne propunem să cercetăm [44], [49] ce proprietăți dinamice au firele a căror relație $T \sim \varepsilon$ este de forma

$$T = T\,(\varepsilon,\ \dot{\varepsilon}). \qquad (6.86)$$

Scanned with OKEN Scanner

Această relaţie poate fi eventual şi neliniară; vom considera mai jos cîteva exemple particulare în care această relaţie va fi considerată liniară. În relaţia (6.86), alungirea relativă ε poate să intervină explicit sau nu, însă în tot ce urmează vom presupune că viteza de alungire intervine explicit în această relaţie. În afară de această presupunere, nu se mai fac deocamdată nici un fel de alte presupuneri restrictive asupra relaţiei (6.86). Vom considera deocamdată că această relaţie este oarecare; anumite particularizări vor fi examinate ulterior. Firele vor fi de asemenea considerate foarte lungi, astfel încît fenomenul de reflectare a undelor nu intervine.

Toate calculele făcute în § 3 trebuie refăcute folosind relaţia (6.86). În acest caz ecuaţiile de mişcare ale firului devin

$$\frac{\partial x}{\partial s_0}\frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2}+\frac{\partial y}{\partial s_0}\frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2}+\frac{\partial z}{\partial s_0}\frac{\partial^2 z}{\partial s_0^2}-(1+\varepsilon)\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}=0$$

$$\frac{T}{1+\varepsilon}\frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2}-\rho_0\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{(1+\varepsilon)\left[\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}+\frac{\partial T}{\partial \dot{\varepsilon}}\frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial s_0}\right]-T\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial x}{\partial s_0}+X=0. \qquad (6.87)$$

(x,y,z)

Să notăm cu $V(s_0, t)=0$ ecuaţia unei curbe oarecare de discontinuitate din planul (s_0,t). Caracteristicele sistemului (1.4) vor fi date de un determinant, care după dezvoltare devine

$$(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \dot{\varepsilon}}\left(\frac{\partial V}{\partial s_0}\right)^3\left[\frac{T}{1+\varepsilon}\left(\frac{\partial V}{\partial s_0}\right)^2-\rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]=0. \qquad (6.88)$$

Rezultă deci că pentru derivatele de ordin maxim ce intervin în ecuaţiile (6.87) există două tipuri de discontinuităţi posibile: discontinuităţi propagabile instantaneu care satisfac relaţia $\frac{\partial V}{\partial s_0}=0$ sau discontinuităţi propagabile cu viteză finită şi care satisfac relaţia

$$\frac{T}{1+\varepsilon}\left(\frac{\partial V}{\partial s_0}\right)^2-\rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2=0. \qquad (6.89)$$

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de aceste din urmă discontinuităţi. Pentru studiul discontinuităţilor longitudinale ale căror fronturi se propagă instantaneu, a se vedea Cap. II şi bibliografia indicată acolo. De remarcat că deşi frontul undelor longitudinale se propagă instantaneu, partea principală a perturbaţiei se propagă totuşi cu viteză finită [204]. Studiul propagării perturbaţiilor longitudinale nu se poate face cu ajutorul metodei caracteri-

Scanned with OKEN Scanner

risticelor. Pentru studiul undelor transversale vom aplica tocmai această metodă.

b) **Undele transversale.** Pentru a obține relațiile diferențiale satisfăcute pe caracteristicele (6.89) vom rezolva sistemul (6.87) în raport cu derivatele de ordin maxim. Vom atașa acestui sistem și relațiile (6.83). Obținem astfel

$$-(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \dot{\varepsilon}}\frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial s_0}+[\xi x_{s_0}+\eta y_{s_0}+\zeta z_{s_0}]-$$

$$-(1+\varepsilon)\left[\frac{T}{1+\varepsilon}-\rho_0\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\right]\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}=0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2}=\frac{\xi(1+\varepsilon)-x_{s_0}[\xi x_{s_0}+\eta y_{s_0}+\zeta z_{s_0}]}{(1+\varepsilon)^2\left[\frac{T}{1+\varepsilon}-\rho_0\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\right]}+\frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}}{1+\varepsilon}\qquad (x,y,z) \tag{6.90}$$

în care

$$\xi=\rho_0\left[dx_t\frac{ds_0}{dt}-dx_{s_0}\right]\frac{1}{dt}+\frac{T-(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}x_{s_0}-X. \qquad (x,y,z)$$

Din (6.90) rezultă că pe caracteristicele (6.89) a căror ecuație se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{T}{1+\varepsilon}-\rho_0\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2=0 \tag{6.89'}$$

sînt satisfăcute relațiile diferențiale

$$-(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \dot{\varepsilon}}\frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial s_0}+[\xi x_{s_0}+\eta y_{s_0}+\zeta z_{s_0}]=0$$

$$\frac{1}{x_{s_0}}\left[dx_{s_0}-dx_t\frac{ds_0}{dt}+Xdt\right]=\frac{1}{y_{s_0}}\left[dy_{s_0}-dy_t\frac{ds_0}{dt}+Ydt\right]= \tag{6.91}$$

$$=\frac{1}{z_{s_0}}\left[dz_{s_0}-dz_t\frac{ds_0}{dt}+Zdt\right].$$

După cum se vede, formal, ultima relație (6.91) coincide cu (6.73'), după cum (6,89'), formal coincide cu (6.73). Pentru calcule numerice va trebui să ținem seama că atît în (6.89') cît și în (6.91), tensiunea este o funcție ce depinde atît de ε cît și de $\dot{\varepsilon}$. Prima relație (6.91) dă variația lui $\dot{\varepsilon}$ de-a lungul caracteristicelor.

Să notăm cu α, β și γ coeficienții de salt corespunzători derivatelor secunde ale lui x, y și z la traversarea frontului unei unde.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece la o asemenea traversare $\frac{\partial z}{\partial s_0}$ este continuu, din prima relaţie (6.87) rezultă

$$x_{s_0}\,\alpha + y_{s_0}\,\beta + z_{s_0}\,\gamma = 0 \tag{6.92}$$

şi deci undele de mai sus sînt transversale. Ele se propagă cu viteza

$$c\,(\varepsilon,\,\dot{\varepsilon}) = \pm\sqrt{\frac{T\,(\varepsilon,\,\dot{\varepsilon})}{\rho_0[1+\varepsilon]}}. \tag{6.93}$$

Rezultă deci că viteza de propagare depinde de $\dot{\varepsilon}$ numai prin intermediul tensiunii. În general, această viteză nu este constantă.

La traversarea unui front de undă, derivata vitezei de deformare este continuă, după cum rezultă din ultimele trei relaţii (6.87) sau prima relaţie (6.90). Deci pe frontul undelor tansversale sînt discontinue numai derivatele de ordinul al doilea ale coordonatelor. Deci aceste unde provoacă schimbarea formei firului.

De remarcat că dacă în relaţia (6.86) nu intervine viteza de deformare, în fir sînt propagabile cu viteză finită şi unde longitudinale. Deci cazul particular cînd în relaţia (6.86) nu intervine viteza de deformare nu se poate obţine prin particularizarea cazului mai general cînd această viteză de deformare intervine în relaţia (6.86).

Rezolvarea completă a problemei se face prin integrarea numerică a sistemului (6.91) pe caracteristicele (6.89′), ţinînd seama de (6.83), de condiţiile de la capătul firului şi eventual de distribuţia anterioară a deformaţiilor în fir. Această integrare este dificilă în cazul general.

c) **Cazuri particulare.** Să examinăm acum cîteva cazuri particulare mai utilizate ale relaţiei (6.86). Vom da cîteva exemple de relaţii liniare folosite în special în reologie.

1°. Să considerăm în primul rînd materiale elasto-vîscoase (numite uneori cu «elasticitate întîrziată» sau «model Voigt») pentru care relaţia dintre tensiune şi deformaţie este de forma

$$T = E\,\varepsilon + \mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}. \tag{6.94}$$

În (6.94), E şi μ vor fi considerate constante. Mărimea E caracterizează proprietăţile elastice ale materialului respectiv, iar μ proprietăţile vîscoase.

Undele transversale se propagă în aceste fire cu viteza

$$c\,(\varepsilon,\,\dot{\varepsilon}) = \sqrt{\frac{E\,\varepsilon + \mu\,\dot{\varepsilon}}{\rho_0\,(1+\varepsilon)}}. \tag{6.95}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci viteza de deformare influenţează viteza de propagare. Cu creşterea sau scăderea vitezei de deformare, creşte sau scade viteza de propagare. La materialele mai vîscoase, această influenţă este mai accentuată.

Viteza de propagare (6.95) poate fi constantă dacă deformaţia în fiecare secţiune a firului satisface ecuaţia diferenţială $E\,\varepsilon + \mu\,\dot{\varepsilon} = T_0\,(1 + \varepsilon)$ unde T_0 este o constantă. Este deci necesar ca distribuţia de deformaţii în fir să fie dată de o relaţie exponenţială ce rezultă din ecuaţia diferenţială de mai sus. Pentru o distribuţie oarecare a deformaţiilor însă, viteza de propagare (6.95) nu este constantă.

Studiul propagării perturbaţiilor longitudinale în bare al căror material satisface o relaţie de tipul (6.94) a fost făcut de *I. N. Zverev* [243] şi de *J. A. Morrison* [147]. Combinînd metodele utilizate de aceşti autori cu consideraţiile de mai sus, se poate studia propagarea perturbaţiilor longitudinale şi transversale în fire satisfăcînd o relaţie de tipul (6.94).

2°. Raţionamentele din exemplul precedent pot fi repetate în mod cu totul similar pentru o serie de alte cazuri particulare ale relaţiei (6.86). Astfel pentru firele vîscoase vom lua $T = \mu\,\dot{\varepsilon}$; pentru materiale vîsco-plastice cu consolidare liniară relaţia $T = T_s + E_1\,(\varepsilon - \varepsilon_s) + \mu\,\dot{\varepsilon}$; pentru materiale vîsco-plastice cu consolidare exponenţială relaţia $T = K\,\varepsilon^n + \mu\,\dot{\varepsilon}$ etc. Consideraţii similare se pot face şi pentru cazul unor relaţii (6.86) neliniare.

Trebuie să observăm însă că pentru unul şi acelaşi fir (de exemplu un fir artificial), pentru diferite porţiuni ale curbei $T \sim \varepsilon$ sînt de aplicat în general diferite relaţii dintre tensiune şi deformaţie. Pentru valori mici ale deformaţiei, influenţa vitezei de deformare se poate cîteodată neglija şi atunci se poate aplica teoria din paragraful precedent.

Pe de altă parte este interesant de remarcat că pe cînd în fluidele vîscoase metoda caracteristicelor conduce la concluzia că frontul undelor se propagă cu viteză nemărginită sau undele sînt staţionare [109], în firele vîscoase frontul undelor transversale se propagă totuşi cu o viteză finită.

d) **Vibraţii longitudinale.** Problema vibraţiilor longitudinale ale firelor elastice sau vîsco-elastice, ce sînt în poziţie verticală, au o greutate agăţată de capătul de jos şi lungimea variabilă, a făcut obiectul mai multor lucrări ale unor cercetători ucrainieni de la Kiev. Această problemă se referă la problema fizică a deformării cablurilor de ascensoare, macarale etc., cînd se ţine seama de frecarea interioară de tip histerezis. Cablul se aproximează matematic printr-un fir elastic sau elasto-vîscos (v. [196], [197] şi bibliografia indicată în aceste lucrări).

Scanned with OKEN Scanner

§ 5. PROPAGAREA UNDELOR DE ŞOC ÎN FIRE

a) **Undele longitudinale.** 1. *Punerea problemei.* Din cele spuse mai sus, şi ţinînd seama de cele spuse referitor la propagarea undelor de şoc în bare, este clar că şi în fire se pot propaga unde de şoc longitudinale. În cele ce urmează vrem să confirmăm printr-un exemplu această posibilitate. Ne vom referi în special la fire de cauciuc, deşi aceleaşi consideraţii pot fi făcute şi pentru epruvete mai groase de cauciuc. Mai mulţi autori (*Lenski* şi *Tarasova* [127], *Kolsky* [105]) au atras atenţia că în cauciuc, şi în unii polimeri înalţi, pot să apară unde de şoc, datorită faptului că concavitatea curbei $T \sim \varepsilon$ este dirijată spre axa tensiunilor pozitive. (Pentru studiul experimental al diagramei dinamice $T \sim \varepsilon$ pentru cauciuc v. [127] şi [55].) Se pune problema apariţiei undelor de şoc, chiar pentru o încărcare monotonă la capătul firului.

Pentru că deformaţiile cauciucului sînt foarte mari, pentru studiul proprietăţilor lui dinamice, firul se deformează întîi static pînă la o anumită deformaţie, iar apoi se încarcă monoton dinamic. Deformaţia statică iniţială poate fi oricît de mare, dar deformaţia dinamică trebuie să fie destul de mică, astfel încît să putem aplica teoria obişnuită a propagării undelor şi să putem neglija influenţa vitezei de deformare. Luînd diferite alungiri statice iniţiale, vom putea studia proprietăţile dinamice ale cauciucului, pe porţiuni, pe toată întinderea diagramei $T \sim \varepsilon$. De asemenea vom presupune că firul este suficient de lung, astfel încît să putem neglija influenţa undelor reflectate.

La cauciuc sînt de considerat în general două tipuri de diagrame $T \sim \varepsilon$: o diagramă în care concavitatea curbei este dirijată numai spre axa tensiunilor pozitive şi alta în care concavitatea este dirijată iniţial spre axa ε, dar la un moment dat se schimbă, avînd deci forma de S. În cele ce urmează, pentru fiecare din aceste tipuri de diagrame vom folosi cîte o relaţie matematică care să le aproximeze [47].

2. *Diagrama $T \sim \varepsilon$ nu-şi schimbă concavitatea.* Să considerăm în primul rînd diagrame $T \sim \varepsilon$ ce au concavitatea curbei dirijată mereu spre axa tensiunilor pozitive. Cauciucul vulcanizat este un material pentru care diagrama $T \sim \varepsilon$ este de acest tip. Pentru acest material, *R. Ariano* (v. *G. S. Izraelit* [95]) a propus relaţia

$$T = -\frac{a\varepsilon}{\varepsilon - b} \tag{6.96}$$

în care a şi b sînt constante pozitive caracteristice materialului. În (6.96) b este limita alungirii relative, deci cînd $\varepsilon \to b$, tensiunea

Scanned with OKEN Scanner

tinde către infinit; iar constanta a caracterizează rezistența inițială la deformare a cauciucului. Valorile ambelor constante depind de compoziția amestecului și de regimul de vulcanizare. În fig. 51 am reprezentat grafic funcția (6.96) pntru $a = 854$ și $b = 10{,}33$. Aceste valori ale constantelor corespund unui cauciuc format din 100 părți cauciuc natural și 8 părți sulf, vulcanizat 40 de minute la 143°C [95].

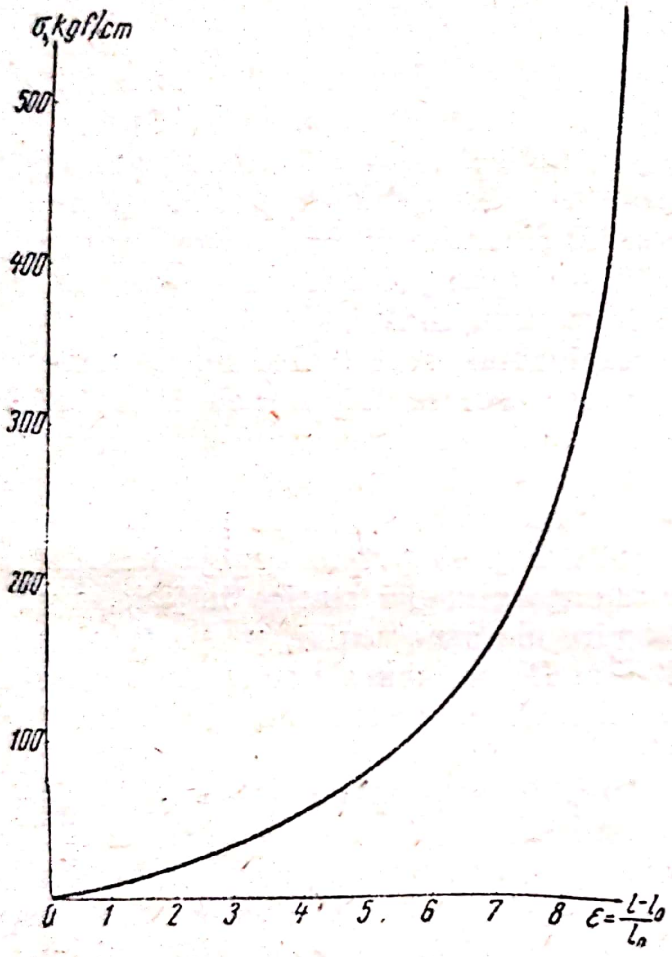

Fig. 51

Frontul undelor longitudinale propagabile în cauciucul de tipul (6.96) sînt de forma

$$s_0 = -\sqrt{\frac{ab}{\rho_0}}\,\frac{t-\tau}{\varepsilon - b} \qquad (6.97)$$

unde τ este un parametru de dimensiunea timpului. Pe aceste fronturi de undă avem discontinuități de ordinul al doilea pentru coordonate sau de ordinul întîi pentru tensiuni și deformații.

Dacă presupunem că la capătul firului alungirea crește monoton conform legii

$$\varepsilon = \lambda\tau \qquad (6.98)$$

(λ fiind un parametru pozitiv) iar apoi într-un interval de timp rămîne constantă, putem găsi în orice moment distribuția de tensiuni, deformații și viteze în orice punct al firului.

Vom atrage atenția însă că (6.97) reprezintă în planul (s_0, t) un fascicul convergent de drepte. Făcînd aceleași considerații ca și la oțelul cu conținut de crom și nichel (cap. III, § 2) se arată că toate dreptele (6.97) trec printr-un punct fix din planul (s_0, t). Deci pînă la valoarea corespunzătoare a lui s_0, în fir se vor propaga unde de al doilea ordin, iar de la această secțiune se va propaga o undă de șoc longitudinală.

Considerații similare pot fi făcute și pentru încărcări monotone de alt tip decît cea dată de (6.98).

3. *Diagrama în formă de S.* Alte tipuri de cauciucuri admit diagrame $T \sim \varepsilon$ în formă de S (v. de exemplu: *Bartenev* [17], *Izraelit* [95]). Noi în cele ce urmează vom utiliza o relaţie propusă de *Eisenberg* şi *Falenberg* (v. [95] p. 57):

$$T = \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^2 + \gamma\varepsilon^3 \tag{6.99}$$

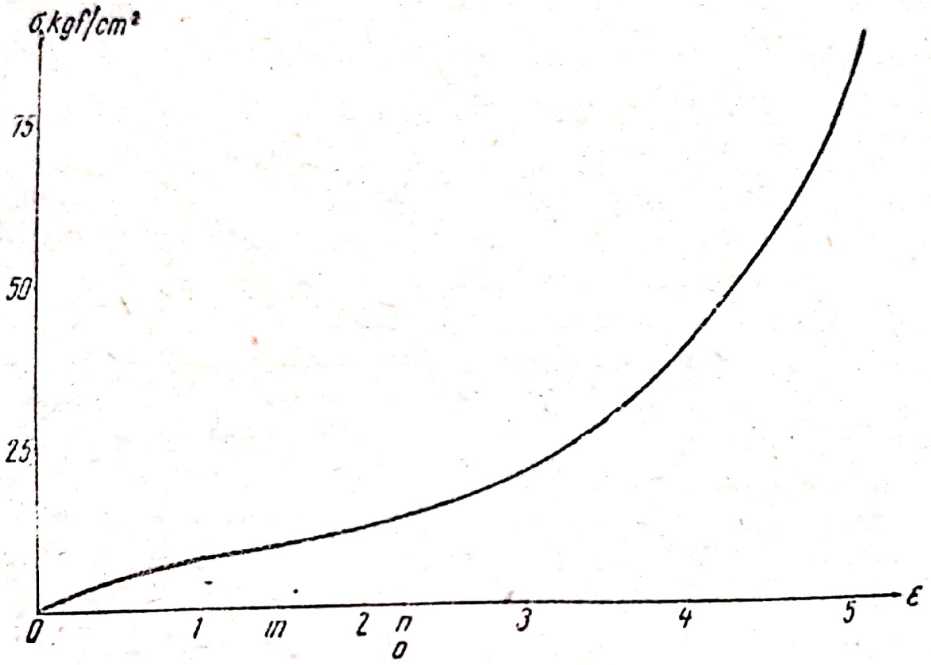

Fig. 52

în care α şi γ sînt constante pozitive, iar β este o constantă negativă, toate fiind caracteristice materialului respectiv. Pentru exemplificare vom considera cazul unui amestec necomplet de cauciuc natural, pentru care $\alpha = 11{,}46$, $\beta = -5{,}07$ şi $\gamma = 1{,}14$.

Relaţia (6.99), în care s-a ţinut seama de valorile particulare ale constantelor, a fost reprezentată în fig. 52. Schimbarea concavităţii se produce pentru $\varepsilon = 1{,}4824$. Punctul corespunzător de pe axa ε a fost notat pe fig. 52 cu *m*.

Fronturile undelor longitudinale propagabile într-un asemenea material sînt date de ecuaţia

$$s_0 = \sqrt{\frac{\alpha + 2\beta\varepsilon + 3\gamma\varepsilon^2}{\rho_0}}\ (t - \tau),$$

iar dacă presupunem că la capătul firului deformaţia variază conform lui (6.98) ecuaţia lor devine

$$s_0 = \sqrt{\frac{\alpha + 2\beta\lambda\tau + 3\gamma\lambda^2\tau^2}{\rho_0}}\ (t - \tau). \tag{6.100}$$

Legea (6.98) a fost aleasă astfel încît încărcarea să fie monotonă şi expresia ei matematică să fie cea mai simplă cu putinţă.

Pentru a obţine locul geometric al intersecţiei fronturilor undelor lui Riemann, vom deriva (6.100) în raport cu τ. Obţinem

$$\tau = \frac{-3(\gamma\lambda t - \beta) \pm \sqrt{9(\gamma\lambda t - \beta)^2 + 24\gamma(\beta\lambda t - \alpha)}}{-12\gamma\lambda}. \quad (6.101)$$

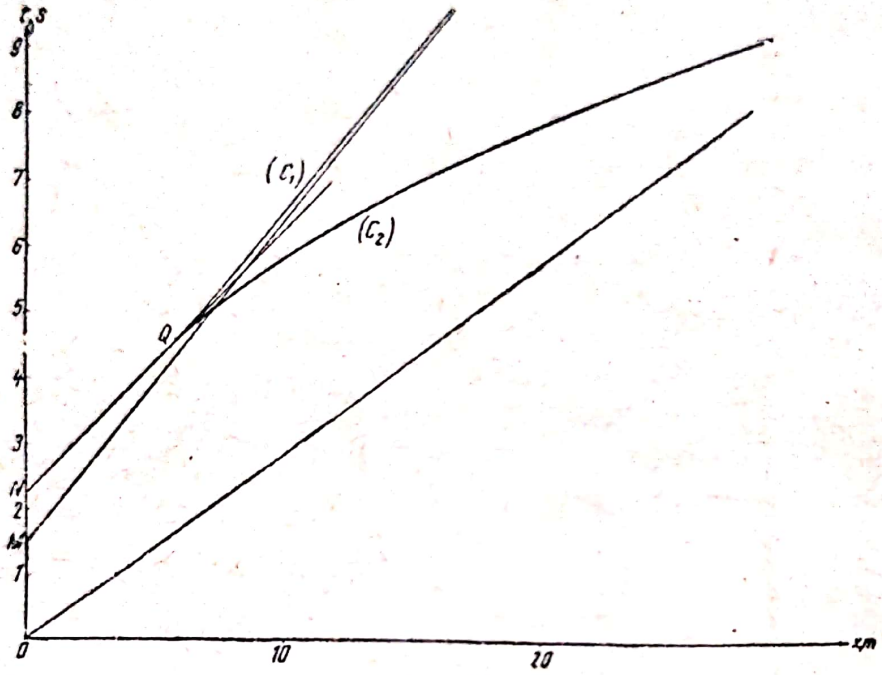

Fig. 53

Eliminînd parametrul τ între (6.101) şi (6.100) obţinem locul geometric căutat. Acest loc geometric a fost reprezentat în fig. 53 pentru valorile particulare ale constantelor α, β, γ citate mai sus, pentru $\frac{1}{\rho_0} = 10{,}54 \cdot 10^{-6}$ m^4 g^{-1} s^{-2} şi $\lambda = 1$. El este o curbă cu două ramuri (C_1) şi (C_2) tangente în punctul Q.

Frontul primei unde elastice, corespunzătoare valorii $\tau = 0$ a parametrului τ, care desparte în planul (s_0, t) domeniul perturbat de cel neperturbat, este dreapta OB. Fronturile undelor de încărcare care traversează axa Ot între punctele O şi M sînt divergente. Deci pentru deformaţiile de la capătul firului date de (6.98), nu este posibilă apariţia undelor de şoc în acest domeniu. Punctul M corespunde punctului de inflexiune de pe diagrama $T \sim \varepsilon$, adică punctului m din fig. 52. Pentru deformaţii statice iniţiale mai mari, pentru care frontul undelor de încărcare traversează axa Ot între punctele M şi N [adică deformaţia în fig. 52 este cuprinsă între m şi n] este posibilă apariţia undelor de şoc. Să considerăm una din aceste unde,

corespunzătoare unei anumite valori τ_1 a lui τ. Ca și în exemplul precedent, vom presupune că deformația dinamică la capătul firului a crescut monoton și apoi, într-un anumit interval de timp, ea a rămas constantă. Această valoare constantă a lui ε corespunde valorii τ_1 a parametrului τ. Pentru $t > \tau_1$, deformația la capătul firului rămîne constantă și egală cu $\lambda\tau_1$. Din (6.101) și (6.100) obținem coordonatele s_{01} și t_1 ale punctului de tangență dintre unda noastră și înfășurătoarea (C_1). Pentru $0 < s_0 \leqslant s_{01}$ unda este de al doilea ordin, iar pentru $s_0 > s_{01}$ ea devine undă de șoc. Caracteristicele ce trec prin punctele M și N sînt fronturile primei și respectiv ultimei unde ce posedă această proprietate. În porțiunea de fir $s_0 < s_{01}$, deformația crește monoton datorită unui fascicul de unde Riemann. În porțiunea de fir $s_0 > s_{01}$ deformația va suferi un salt, datorită unei singure unde de șoc, cea al cărei front trece prin punctul (s_{01}, t_1).

Pentru deformații statice inițiale și mai mari, adică pentru unde al căror front intersectează axa Ot mai sus de punctul N, situația este similară. Cele două ramuri, superioară (C_1) și inferioară (C_2) ale curbei din fig. 53 joacă totuși roluri deosebite în procesul de propagare al undelor. Fiecare punct de pe (C_1) va împărți frontul undei corespunzătoare ce trece prin acest punct și care este o dreaptă, în două porțiuni: pe prima ea este o undă de al doilea ordin, iar pe a doua ea trebuie considerată undă de șoc. Deci fronturile undelor tangente la (C_1), care sînt fie unde de al doilea ordin fie unde de șoc, sînt în planul (s_0, t) drepte, iar punctele de pe această curbă nu au decît rolul de a delimita cele două porțiuni ale dreptelor. Ele joacă rolul punctelor fixe din exemplul precedent.

Curba (C_2) însă joacă (cu o anumită aproximație) rolul unei unde de șoc, pe care deformațiile nu sînt constante ci monoton crescătoare. Ea nu apare decît dacă deformația la capătul firului depășește deformația corespunzătoare punctului N. În exemplul nostru numeric $\varepsilon_N = 2{,}242$. Coordonatele punctului Q sînt atunci $s_{0Q} = 5{,}77$ m și $t_Q = 4{,}52$ s. Să notăm cu t_2 și s_{02} coordonatele unui punct de pe (C_2), care este punctul de tangență dintre (C_2) și frontul undei lui Riemann ce corespunde valorii maxime a lui ε la capătul firului. Ca și mai înainte, vom presupune că deformația dinamică crește monoton la capătul firului, și apoi, atingînd valoarea maximă $\varepsilon_{max} = \lambda\tau_2$, rămîne constantă într-un anumit interval de timp. Dacă la capătul firului $\varepsilon > \varepsilon_N$, situația va fi următoarea: în porțiunea de fir $s_0 \leqslant s_{0Q}$ undele noastre sînt de al doilea ordin și fronturile respective sînt drepte. Pentru $s_{0Q} < s_0 < s_{02}$ în fir se propagă o undă de șoc al cărei front se poate aproxima cu curba (C_2), pe care deformația și viteza de propagare sînt monoton crescătoare. În fiecare punct al

Scanned with OKEN Scanner

tui (C_2) viteza de propagare și deformația se pot afla din ecuația tangentei din acel punct, care este una din dreptele (6.100). Pentru $s_0 > s_{02}$ unda de șoc este o dreaptă, și anume tangenta la (C_2) în punctul (s_{02}, t_2). Deci pentru $s_0 > s_{02}$ viteza de propagare este constantă.

Dacă la capătul firului $\varepsilon < \varepsilon_N$, curba ($C_2$) nu mai apare.

4. *Concluzii.* Reamintim că toate calculele de mai sus nu sînt valabile decît pentru mici deformații dinamice, precedate de oricît de mari deformații « supra-elastice ».

Mai sus am utilizat noțiunea de undă Riemann. Pe ea însă deformațiile nu sînt plastice ci « supra-elastice ».

Pentru diferite încărcări monotone la capătul firului, și pentru diferite relații $T \sim \varepsilon$, se pot pune precis în evidență porțiunile din fir străbătute de unde de al doilea ordin, sau de unde de șoc. Cu cît deformația la capătul firului crește mai repede (λ este mai mare), cu atît porțiunea de fir în care nu apar unde de șoc este mai mică. La încărcări considerate « instantanee », această porțiune poate fi neglijată și deci putem presupune că undele de șoc pornesc chiar de la capătul firului.

Fronturile undelor longitudinale de șoc ce pot apărea în cauciuc nu sînt neapărat drepte în planul (s_0, t) ci, depinzînd de condițiile la limită și de relația $T \sim \varepsilon$, ele pot fi eventual și curbe. În acest din urmă caz, viteza de propagare a undei de șoc este variabilă (crescătoare) și deformația pe această undă este de asemenea variabilă (crescătoare). Deci viteza de propagare a frontului undelor « supra-elastice » este variabilă.

Dacă în exemplul de la punctul 2 al acestui paragraf am fi presupus că încărcarea la capătul firului este dată de un polinom omogen și de gradul al doilea în τ, am fi obținut o înfășurătoare asemănătoare cu curba (C_1) de la acest punct. Ea ar fi jucat același rol ca și această curbă (C_1). Pentru ambele exemple, se pot considera legi de variații monotone ale deformațiilor la capătul firului mai complicate; calculele însă se îngreuiază mult.

De remarcat că deși încărcarea la capătul firului a fost dată de o aceeași lege (6.98) în ambele exemple, curba (C_2) nu a apărut decît la cel de al doilea exemplu. Ar rezulta din aceste exemple particulare că curba (C_2) nu apare datorită felului particular de încărcare, ci datorită alurii particulare a curbei $\sigma \sim \varepsilon$.

Calculele de mai sus au fost făcute pentru a arăta că, teoretic, în firele de cauciuc este posibilă apariția undelor de șoc. Întrucît însă n-am ținut seama de alți factori, printre care inerția transversală, relaxarea etc., rezultatele calculelor ar putea să nu fie în concordanță cu experiența.

Scanned with OKEN Scanner

b) **Undele transversale.** *Gr. C. Moisil* [141] a dat încă din 1929 o metodă pentru studiul dinamicii unui fir perfect flexibil și inextensibil. Considerînd firul ca un sistem olonom cu o infinitate de grade de libertate, i se pot aplica metodele mecanicii analitice, folosind analiza funcțională.

Într-o lucrare recentă [143] *Gr. C. Moisil* aplică această metodă la studiul dinamicii unui fir avînd puncte de discontinuitate ale tangentei. Se consideră în particular, propagarea unei unde de șoc într-un fir greu, perfect flexibil și inextensibil, avînd ambele extremități fixe și pe o aceeași orizontală.

Să considerăm că firul se mișcă într-un plan și să notăm cu $\varphi(s)$ unghiul pe care îl face tangenta la fir cu orizontala. Avem

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi(s), \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi(s).$$

Presupunînd că una din extremitățile firului este fixă și se află în origine, se obține

$$x(s) = \int_0^s \cos\varphi(\sigma)\,d\sigma, \qquad y(s) = \int_0^s \sin\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

Dacă firul are un punct de discontinuitate a tangentei, care are abscisa curbilinie λ, funcția $\varphi(\sigma)$ suferă o discontinuitate în punctul λ: $\varphi(\lambda+0) - \varphi(\lambda-0) = \gamma$. Fie $\psi(s)$ o funcție definită prin

$$\psi(s) = \varphi(s) \qquad 0 \leqslant s < \lambda$$
$$\psi(s) = \varphi(s) - \gamma \qquad \lambda < s \leqslant l.$$

Funcția $\psi(s)$ este continuă pentru $0 \leqslant s \leqslant l$, iar $\varphi(s)$ este definit de ψ, λ și γ. Coordonatele firului vor fi deci

$$x(s) = \int_0^s \cos\psi(\sigma)\,d\sigma \qquad 0 \leqslant s \leqslant \lambda$$

$$x(s) = \int_0^\lambda \cos\psi(\sigma)\,d\sigma + \int_\lambda^s \cos[\psi(\sigma)+\gamma]\,d\sigma \qquad \lambda \leqslant s \leqslant l$$

și

$$y(s) = \int_0^s \sin\psi(\sigma)\,d\sigma \qquad 0 \leqslant s \leqslant \lambda$$

$$y(s) = \int_0^\lambda \sin\psi(\sigma)\,d\sigma + \int_\lambda^s \sin[\psi(\sigma)+\gamma]\,d\sigma \qquad \lambda \leqslant s \leqslant l.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste formule arată că un fir perfect flexibil şi inextensibil, care se mişcă într-un plan, are o discontinuitate a tangentei şi una din extremităţi fixă, poate fi considerat ca un sistem olonom, forma sa fiind definită de o funcţie continuă $\psi(s)$ şi de două constante λ şi γ; coordonatele $x(s)$, $y(s)$ ale punctelor firului sînt funcţii de λ şi γ şi sînt funcţionale de $\psi(s)$. λ, γ şi $\psi(s)$ joacă rolul coordonatelor lagrangeene din mecanica analitică clasică. În unele probleme dinamice, λ şi γ pot fi considerate funcţii date. Ele pot fi obţinute experimental.

Pornind de la aceste idei *Gr. C. Moisil* aplică ecuaţiile mecanicii analitice pentru studiul mişcării firului plan cu un punct angulos. Astfel se calculează: deplasările virtuale, distribuţia vitezelor şi acceleraţiilor, variaţia energiei cinetice, condiţiile de echilibru etc.

§ 6. LOVIREA TRANSVERSALĂ A FIRELOR CU CORPURI DE DIFERITE FORME

După cum s-a văzut din paragrafele precedente, majoritatea autorilor s-au ocupat de problema lovirii firului, cînd prin lovire corpul care loveşte şi firul au un singur punct de contact. Matematic se putea considera că firul a fost lovit cu un singur punct. Lovirea firelor cu corpuri de diferite forme, cînd prin lovire corpul şi firul au mai multe puncte comune, a fost considerată de *I. N. Zverev* şi de *H. A. Rahmatulin* [178]. Zverev a considerat problema lovirii unui fir flexibil cu o pană şi a arătat că în domeniul mişcării transversale, este posibil ca firul să se lipească în întregime de pană. Cu toate acestea, pana va acţiona asupra firului numai cu ajutorul a trei forţe concentrate: una în vîrful penei şi cîte una în punctele firului care trec de la mişcarea longitudinală la cea transversală. Se presupune că firul are proprietatea de a se deforma longitudinal, dar printr-o acţiune transversală asupra lui, el nu se deformează. Deci după atingerea penei, componentele normale ale vitezelor particulelor firului sînt nule.

H. A. Rahmatulin a reluat acestă problemă şi a arătat că cu ajutorul presupunerilor lui *Zverev* se poate rezolva problema mai generală a lovirii firului cu un corp de formă oarecare. El demonstrează existenţa soluţiei problemei, dar nu şi unicitatea ei. Iată cum a procedat *Rahmatulin*.

a) **Ecuaţiile.** Să presupunem că un fir flexibil, rectiliniu şi nemărginit loveşte un corp de o anumită formă. Să mai presupunem că acele particule ale firului care nu au atins încă corpul lovit se pot deforma şi ele, căpătînd o anumită viteză longitudinală.

Scanned with OKEN Scanner

Să notăm cu u lungimea firului de la punctul C (fig. 54) pînă la particula considerată; cu w distanța de la originea coordonatelor pînă la particulele firului.

Ecuațiile de mișcare în domeniile CB și BA vor fi respectiv

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{6.102}$$

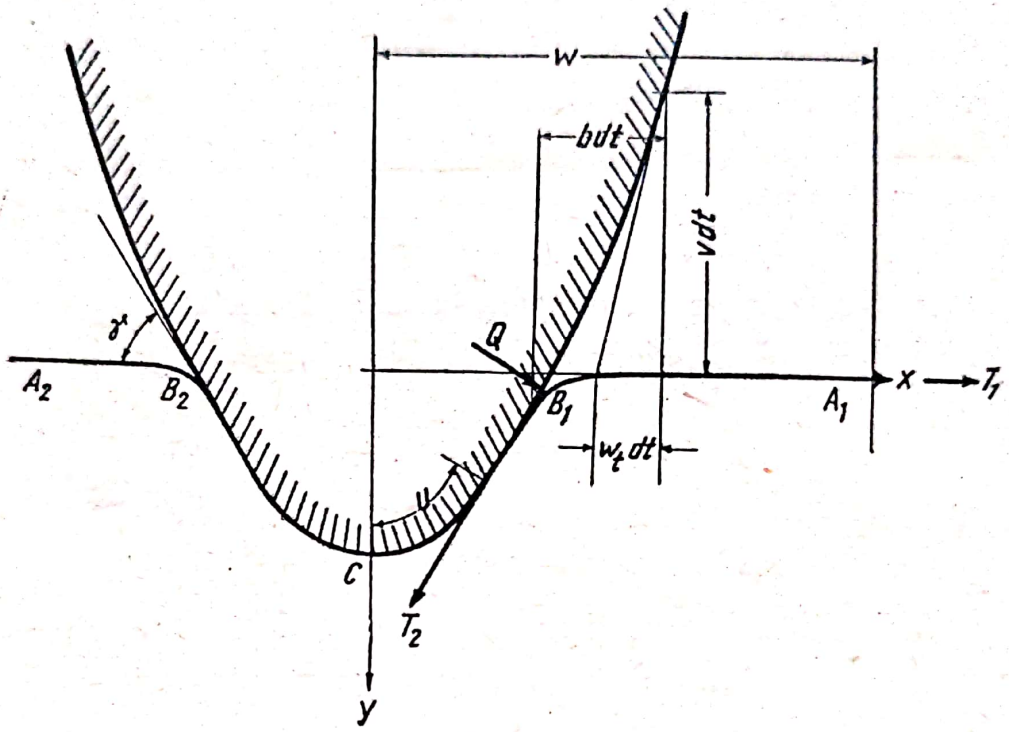

Fig. 54

Notînd cu p presiunea firului pe corp și cu r raza de curbură a corpului, în domeniul de contact dintre fir și corp are loc relația

$$p = \frac{1}{r}\left[T - \frac{\rho_0 u_t^2}{1+\varepsilon}\right]. \tag{6.103}$$

Să considerăm particula de fir, de lungime $\left(b - \frac{\partial w}{\partial t}\right) dt$, care în timpul dt trece din domeniul mișcării libere, în domeniul de contact CB. Ecuația cantității de mișcare pentru această particulă este în proiecție pe tangenta și normala la conturul corpului

$$\begin{aligned} \rho\,(b - w_t)\,(u_t - w_t\cos\gamma - v\sin\gamma) &= T_1\cos\gamma - T_2 \\ \rho\,(b - w_t)\,(v\cos\gamma - w_t\sin\gamma) &= Q + T_1\sin\gamma, \end{aligned} \tag{6.104}$$

unde T_1 este tensiunea în domeniul mișcării libere, T_2 tensiunea în domeniul de contact, Q este forța concentrată în punctele de

trecere, v — viteza firului înainte de lovire, b — viteza de propagare de-a lungul firului a punctului frontieră dintre domeniul mișcării longitudinale și domeniul mișcării transversale, γ — unghiul dintre tangenta la corp în punctele frontieră și direcția inițială a firului.

În afară de aceasta, din fig. 54 rezultă că avem totdeauna

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v}{b} \tag{6.105}$$

iar ecuația de continuitate este

$$\frac{b - w_t}{1 + \varepsilon_1} = \frac{\dfrac{b}{\cos \gamma} - u_t}{1 + \varepsilon_2} \tag{6.106}$$

unde ε_1 și ε_2 sînt deformațiile în domeniul BA și respectiv BC.

b) **Lovirea unei pene.** În acest caz $u_t = 0$ în toate punctele de contact, deci (6.106) devine

$$b\,(1 + \varepsilon_1) = (b - w_t)\,(1 + \varepsilon_2) \cos \gamma \tag{6.107}$$

iar (6.104) devine

$$\rho\,(b - w_t)\,(w \cos \gamma + v \sin \gamma) = T_2 - T_1 \cos \gamma. \tag{6.108}$$

Să considerăm cazul deformațiilor elastice, deci $T_1 = E\varepsilon_1$ și $T_2 = E\varepsilon_2$. O integrală primă a celei de a doua ecuații (6.102) este

$$w_t = -c_0 \varepsilon_1 \quad \text{cu} \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho_0}. \tag{6.109}$$

Ecuațiile (6.107), (6.108) și (6.109) reprezintă un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute w_t, ε_1 și ε_2.

Din a doua ecuație (6.104) și ținînd seama de (6.105) și (6.109), obținem

$$Q = [\rho\,(b + c_0 \varepsilon_1)^2 - T_1] \sin \gamma. \tag{6.110}$$

Să considerăm pe b și pe ε_1 mărimi independente. Atunci condiția de contact dintre fir și suprafața penei este

$$\frac{b}{c_0} + \varepsilon_1 \geqslant \sqrt{(1 + \varepsilon_1)\,\varepsilon_1}.$$

Deci condiția de desprindere va fi

$$\frac{b}{c_0} \leqslant \sqrt{(1 + \varepsilon_1)\,\varepsilon_1} - \varepsilon_1. \tag{6.111}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această condiție este valabilă pentru lovirea unui fir elastic de un corp de formă oarecare. Tot pentru un corp de formă oarecare și pentru un fir oarecare, condiția de desprindere este

$$\frac{b}{c_0} \leqslant \sqrt{\frac{T_1}{\rho_0 c_0^2}(1+\varepsilon_1)} - \int_0^{\varepsilon_1} \frac{c(\varepsilon)}{c_0}\, d\varepsilon. \tag{6.112}$$

Scriind apoi variația energiei și a lucrului forțelor exterioare prin trecerea prin punctele frontieră B, sub forma

$$\Delta \mathcal{E} = \rho (b - w_t) \left(\frac{u_t^2}{2} - \frac{w_t^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right) + \frac{b - w_t}{1+\varepsilon_1} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} T(\varepsilon) d\varepsilon - T_1 w_t + T_2 u_t,$$

Rahmatulin ajunge, după o serie de calcule, la concluzia că prin trecerea prin punctul frontieră B, are loc o pierdere de energie.

Să considerăm acum cazul $b > c_0$. În acest caz $\varepsilon_1 = w_t = 0$. Din (6.104) și (6.106) obținem

$$\rho b (v \sin\gamma - u_t) = E\varepsilon_2 - T_2, \qquad b(1+\varepsilon_2) = \frac{b}{\cos\gamma} - u_t. \tag{6.113}$$

De aici rezultă ușor

$$\varepsilon_2 = -\frac{1-\cos\gamma}{1-\frac{c_0^2}{b^2}} < 0. \tag{6.114}$$

Viteza particulelor rezultă de asemenea ușor dacă ținem seama de (6.105):

$$u_t = v \sin\gamma \left(1 - \frac{c_0^2}{v^2}\frac{1-\cos\gamma}{\cos^2\gamma}\right)\left(1 - \frac{c_0^2 \operatorname{tg}^2\gamma}{v^2}\right)^{-1} = \varphi(l) > v\sin\gamma. \tag{6.115}$$

Pentru că la vîrful penei $u_t = 0$, iar în apropierea punctelor frontieră $u_t > 0$, starea de mișcare din apropierea acestor puncte nu se poate propaga de-a lungul întregii suprafețe de contact. Deci de-a lungul acestei suprafețe trebuie să apară o undă care să facă trecerea de la starea $u_t > 0$ la starea $u_t = 0$. *Rahmatulin* ajunge la concluzia că aceasta nu poate fi decît o undă de șoc, care pentru cazul elastic se propagă cu viteza c_0. Această undă împarte porțiunea de fir în contact cu pana în două: în apropierea vîrfului vom avea o întindere, iar în apropierea punctelor de desprindere o compresiune. Este interesant de remarcat că deși la problemele statice compresiunea în fire nu poate să apară, introducerea ei în probleme dinamice pare uneori justificată.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația cantității de mișcare ne dă

$$(c_0 - u_t)\,\rho_2 u_t = T_8 - T_2$$

unde T_8 este tensiunea în domeniul de întindere, iar T_2 — tensiunea în domeniul de compresiune. De aici se află tensiunea T_8 dacă ne dăm relația $T \sim \varepsilon$.

Utilizînd rezultatele expuse mai sus, se poate trece la studierea lovirii unui corp teșit. În acest caz, *Rahmatulin* atrage atenția că din (6.114) rezultă $\varepsilon_2 = -\infty$ pentru $T = E\varepsilon$ și $c_0 = b$ și deci că valoarea lui b este suficient de apropiată de c_0 cînd deformația depășește limita de elasticitate. Această deformație nemărginită ar fi datorită considerării pentru mari deformații numai a legii lui Hooke. Dacă de exemplu în locul legii lui Hooke se utilizează relația de consolidare liniară, din (6.104) și (6.106) pentru $b > c_0$ se obține

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{c_1^2 - b^2}\left[b\left(v\sin\gamma - b\frac{1-\cos\gamma}{\cos\gamma}\right) - \frac{T_s}{\rho_0} + c_1^2\varepsilon_s\right]. \quad (6.116)$$

Din această formulă rezultă că ε_2 este finit pentru $c_0 = b$.

Trebuie să mai atragem atenția că trecerea de la compresiune la întindere este un proces de descărcare și încărcare în sens invers. Deci pentru calculul deformațiilor plastice de întindere trebuie să ținem seama de efectul Bauschinger.

c) **Lovirea cu un cilindru circular.** Această problemă a fost de asemenea considerată de *H. A. Rahmatulin* [178].

Viteza b de propagare a undei de șoc este

$$b = \frac{d}{dt}\sqrt{r^2 - (r - vt)^2} = \frac{r - vt}{\sqrt{r^2 - (r - vt)^2}}\,v. \quad (6.117)$$

Întrucît în origine (pentru $t = 0$) $b = \infty$, trebuie să existe un interval de timp t_0 în care viteza b este mai mare decît viteza sunetului c_0 în material.

Pe linia de discontinuitate OA (fig. 55) între viteza u_2, deformația ε_2 și unghiul γ există aceleași relații ca și în cazul lovirii cu o pană pentru $b > c_0$: (6.114) și (6.115). În momentul inițial $\gamma \approx 1$, $\varepsilon_2 = 0$ și $u_t = 0$. Pe linia OA, ε_2 și u_t sînt funcții de t, căci $b = b(t)$ și $\operatorname{tg}\gamma = \frac{v}{b(t)}$. Prin urmare problema determinării mișcării în domeniul OA_1C se reduce la o problemă Cauchy. Punctul A_1 este punctul de trecere dincolo de limita de elasticitate. Pentru deformații elastice avem

$$u = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t). \quad (6.118)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia liniei OA are forma

$$x = \sqrt{r^2 - (r - vt)^2}. \tag{6.119}$$

Din condiţiile pe această linie rezultă

$$-\frac{1-\cos\gamma}{1-\frac{c_0^2}{b^2}} = f_1'(x - c_0 t) + f_2'(x + c_0 t) - 1 \tag{6.120}$$

$$-c_0 f_1'(x - c_0 t) + c_0 f_2'(x + c_0 t) = \varphi(t).$$

Din aceste relaţii determinăm pe f_1' şi f_2'.

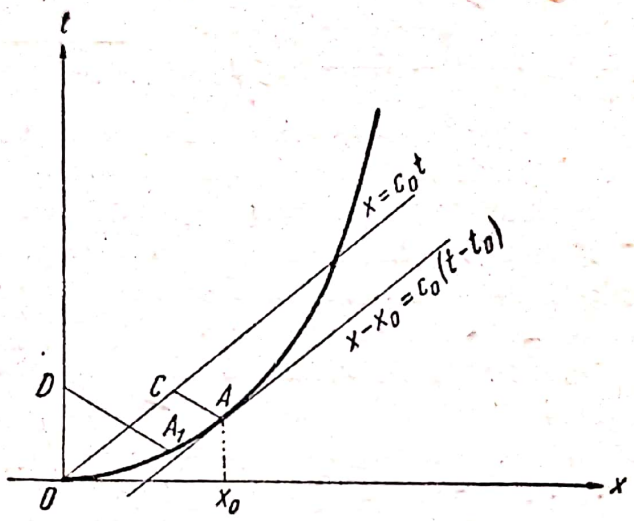

Fig. 55

Să trecem acum la domeniul OCD unde problema determinării mişcării se reduce la o problemă mixtă Cauchy. În acest domeniu să punem

$$u = f_3(c_0 t - x) + f_4(x + c_0 t). \tag{6.121}$$

Pentru că de-a lungul liniei $x = c_0 t$ deplasările sînt continue, trebuie să fie îndeplinită condiţia

$$f_4'(x + c_0 t) = f_2'(x + c_0 t). \tag{6.122}$$

Deoarece pentru $x = 0$, $f_3(c_0 t) = -f_4(c_0 t)$, rezultă

$$f_3'(c_0 t - x) = -f_2'(c_0 t - x). \tag{6.123}$$

Întrucît f_2' este cunoscut din (6.120), formulele (6.122) şi (6.123) permit să se determine vitezele şi deformaţiile.

Scanned with OKEN Scanner

Să trecem la examinarea deformațiilor plastice ce apar prin lovire. În fig. 55 am notat cu A_1 punctul de pe unda de șoc, unde $\varepsilon_2 = \varepsilon_s$ și cu A punctul unde $\lambda = 1$ (deci $\varepsilon_2 = -\infty$). Ordonata t_1 a punctului A_1 se determină din $\varepsilon_s = -\dfrac{1 - \cos\gamma\,(t_1)}{1 - \dfrac{c_0^2}{b^2(t_1)}}$. Ținînd seamă și de (6.105) obținem

$$\varepsilon_s\left(\frac{v^2}{c_0^2}\cos^2\gamma_1 - \sin^2\gamma_1\right) = \frac{v^2}{c_0^2}\cos^2\gamma_1\,[1 - \cos\gamma_1]. \quad (6.124)$$

Ordonata punctului A se determină din $c_0 = \dfrac{r - vt_0}{\sqrt{2rvt_0 - v^2t_0^2}}\,v$. Coordonatele punctului A sînt deci

$$t_0 = \frac{r}{v}\left[1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{v^2}{c_0^2}}}\right], \quad x_0 = \sqrt{2rvt_0 - v^2t_0^2}. \quad (6.125)$$

În cazul consolidării liniare, deformația se obține din (6.116), iar vitezele particulelor se obțin printr-o cuadratură.

Este demonstrată de asemenea în lucrarea lui *Rahmatulin* existența unei curbe în domeniul OA_1D (fig. 55), de-a lungul căreia $\varepsilon = \varepsilon_s$.

În sprijinul teoriei sale, *Rahmatulin* a făcut și o serie de experiențe. El a lovit un șnur de cauciuc de 8,25 mm diametru, cu deformația inițială $\varepsilon_0 = 0{,}5$ și masa unui centimetru de șnur $\rho_0 = 0{,}586 \cdot 10^{-4}\ \text{kg} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^{-2}$, cu corpuri de diferite forme. S-a folosit o pană ascuțită, astfel încît, prin lovire, firul era în contact cu pana într-un singur punct (o pană de 90° cînd viteza de lovire era de 50 m/s) și un cilindru cu diametrul de 70 mm. Mișcarea firului lovit a fost filmată cu un aparat de filmat rapid.

Concluzia la care se ajunge este că schemele teoretice adoptate pentru descrierea mișcării sînt juste.

Din fotografiile reproduse, rezultă clar posibilitatea propagării în fir a unei discontinuități a tangentei, adică a undei de șoc transversale.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII

ALTE PROBLEME CERCETATE

§ 1. PROBLEMA LOVIRII PLĂCILOR

a) Problema lovirii plăcilor cu un corp rigid, cînd prin această lovire se provoacă deformaţii plastice, a fost considerată de *F. A. Bahşian* [13]. Problema considerată de el este următoarea: un cilindru circular de rază a şi de masă M loveşte cu viteza V o placă infinită, de grosime h. În acest caz se examinează curgerea vîsco-plastică ce apare în placă (cilindrul se presupune rigid). Să luăm originea coordonatelor cilindrice în planul plăcii, în centrul bazei cilindrului în momentul contactului. Presupunerea simplificatoare pe care o face *Bahşian* este că prin lovire, în placă apar doar tensiuni de forfecare τ_{rz}, celelalte componente fiind neglijabile. Această situaţie are loc fie în cazul marilor viteze de lovire V, fie în cazul în care masa M a cilindrului este mult mai mare decît masa m a materialului plăcii cuprins sub suprafaţa bazei cilindrului, fie în sfîrşit în cazul unor combinări ale acestor doi factori.

Cu presupunerile de mai sus, ecuaţia de mişcare este

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \tag{7.1}$$

în care w este viteza de deplasare în direcţia lovirii, iar ρ este densitatea materialului plăcii. Pentru relaţia dintre tensiune şi deformaţie s-a utilizat teoria curgerii vîsco-plastice a lui *A. A. Iliuşin* [91]. Conform acestei teorii avem

$$\tau_{rz} = \pm k + \mu \varepsilon_{rz} \tag{7.2}$$

unde k este o constantă plastică, μ — coeficientul de viscozitate iar $\varepsilon_{rz} = \dfrac{\partial w}{\partial r}$.

Înlocuind (7.2) în (7.1) obținem

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{k}{r} \tag{7.3}$$

în care am ținut seamă că $\frac{\partial w}{\partial r} < 0$ și deci în fața lui k vom lua semnul minus. Condițiile inițiale și la limită sînt

$$w = \begin{cases} 0, & r > 0 \\ V, & r = a \end{cases} \text{ pentru } t = 0 \tag{7.4}$$

$$M \frac{\partial w}{\partial t} = 2\pi a h \left(-k + \mu \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad \text{pentru } r = a.$$

Să notăm cu $r = b\ (t)$ raza frontierei circulare pînă la care are loc curgerea plastică. Pe această frontieră avem deci

$$w(b,\ t) = 0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=b} = 0.$$

Bahșian cercetează de fapt numai problema plăcilor cu frontiera dată și deci a doua din condițiile de mai sus cade.

Soluția ecuației (7.3) este găsită după transcrierea acestei ecuații în variabile adimensionale.

În primul rînd este găsită soluția ce corespunde presupunerii că datorită fie vitezei inițiale foarte mari, fie masei mari a cilindrului, viteza cilindrului este puțin modificată. Deci a doua din condițiile (7.4) se înlocuiește prin condiția $w = V$. Soluția este reprezentată cu ajutorul unor funcții Bessel. Din ea se trage concluzia că spre deosebire de lichidele vîscoase, în momentul inițial starea vîscoplastică cuprinde un domeniu finit al plăcii; influența vîscozității materialului este importantă pentru mari viteze de deformare.

În al doilea rînd se obține soluția problemei, luîndu-se în considerare chiar a doua soluție (7.4).

Folosind prima soluție și procedînd ca în balistică, se rezolvă aproximativ problema străpungerii plăcii [1]; se determină valoarea vitezei de lovire V necesară străpungerii plăcii și se dă în funcție de tensiuni, graficul variației flexiunii plăcii după lovire.

b) Aceeași problemă, folosind chiar presupunerile lui *Bahșian* a fost considerată de *A. M. Kocetkov* [101], dar pentru altă

[1]) Problema străpungerii unei plăci cu un proiectil nu este considerată în prezenta lucrare, deși ea a fost studiată de mulți teoreticieni și experimentatori (v. [261] și bibliografia pe care o conține).

relație dintre tensiune și deformație. Se utilizează pentru aceasta relația folosită de *V. V. Sokolovski* [210], [211]:

$$\frac{d\gamma_{rz}}{dt} = \frac{1}{G}\frac{d\tau_{rz}}{dt} \quad \text{pentru} \quad \tau_{rz} \leqslant \tau_s$$
$$\frac{d\gamma_{rz}}{dt} = \frac{1}{G}\frac{d}{dt}[\tau_{rz} - F(\gamma_{rz})] + \frac{k}{G}[\tau_{rz} - F(\gamma_{rz})] \quad \text{pentru} \quad \tau_{rz} \geqslant \tau_s \tag{7.5}$$

în care G este modulul de forfecare, k — o constantă fizică, a cărei dimensiune este inversa dimensiunii timpului, τ_s — limita de fluiditate la forfecare, iar $F(\gamma_{rz})$ este o funcție determinată experimental. Relațiile (7.5) se atașează ecuației de mișcare (7.1) Se obține astfel o ecuație de tip hiperbolic. Problema lovirii conduce deci la studiul propagării undelor plastice de forfecare în placă, cu condițiile inițiale și la limită (7.4).

Kocetkov determină tensiunea, vitezele și deformațiile pentru două cazuri particulare ale funcției $F(\gamma_{rz})$: cazul materialului perfect plastic $F(\gamma_{rz}) = \tau_s$ și cazul materialului consolidabil liniar $F(\gamma_{rz}) = \tau_s[1 + (n^2 - 1)(\gamma_{rz} - 1)]$, n fiind o constantă $(1 < n < \sqrt{2})$ ce depinde de material. Pentru aceasta *Kocetkov* folosește teoria propagării undelor plastice de al doilea ordin, precum și teoria undelor plastice de șoc, pe fronturile undelor de încărcare și descărcare. Utilizînd condițiile de pe frontul undei de încărcare precum și cele la limită, se determină numeric distribuția de tensiuni și vitezele în domeniul de încărcare, precum și frontiera dintre domeniul elastic și vîsco-plastic. Soluția numerică din domeniul de descărcare se obține ținînd seama de condițiile pe frontul undei de descărcare și de condițiile la limită.

c) O altă problemă care conduce la studiul propagării undelor în plăci a fost considerată de *W. Freiberger* [61]. El consideră problema lărgirii bruște a unui orificiu circular paracticat într-o placă plană.

În placă vor exista două regiuni, una elastică și una plastică. Freiberger consideră că regiunea plastică poate fi împărțită la rîndul ei în două domenii: domeniul *I* în care forțele inerțiale sînt mari și nu pot fi neglijate și domeniul *II* în care ele pot fi neglijate, și deci se aplică ecuațiile statice de echilibru (fig. 56).

Condiția de plasticitate în domeniul *II* se ia sub forma

$$\sigma_0 - \sigma_r = \sigma_s . \tag{7.6}$$

În afară de aceasta $\sigma_z = 0$. Ecuația de echilibru a plăcii de grosime constantă h_0 este

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_0}{r} = 0. \tag{7.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

În domeniul *II*, această ecuație este satisfăcută de soluția

$$\sigma_r = \sigma_s \left(\ln \frac{r}{r_2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_s \left(\ln \frac{r}{r_2} + \frac{1}{2} \right) \qquad (r_1 < r < r_2) \qquad (7.8)$$

$$\sigma_z = 0$$

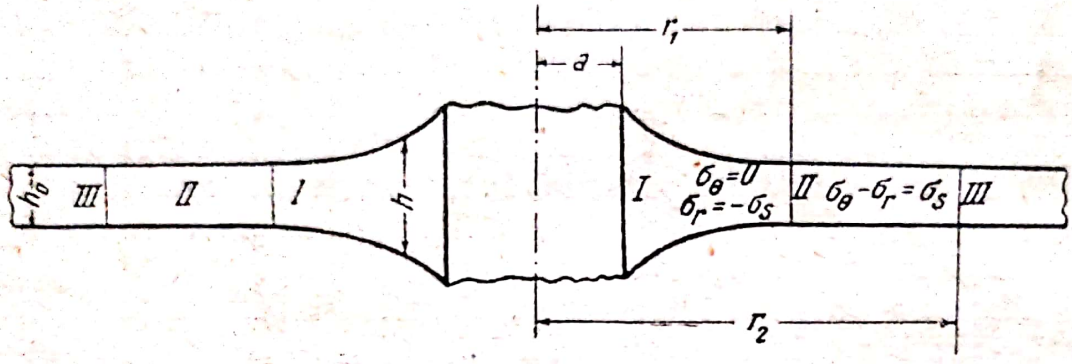

Fig. 56

unde r_1 și r_2 sînt razele frontierelor exterioare ale domeniilor *I* și respectiv *II*. În domeniul elastic *III* soluția este

$$\sigma_r = -\frac{A}{r^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{A}{r^2}, \quad \sigma_z = 0 \qquad (r > r_2). \qquad (7.9)$$

Din cauza continuității pe $r = r_2$, rezultă $A = \frac{1}{2} r_2^2 \sigma_s$.

În domeniul *I* se face presupunerea că în cazul vitezelor constante de întindere, tensiunea tangențială σ_θ este neglijabilă. Din a doua relație (7.8) rezultă atunci condiția dintre $r_1(t)$ și $r_2(t)$: $\ln \frac{r_1}{r_2} = -\frac{1}{2}$ sau $r_1 = 0{,}606\, r_2$. Întîi se determină r_1 din condițiile din domeniul *I*, iar apoi din relația de mai sus rezultă r_2.

În domeniul *I* se consideră că placa are grosimea variabilă $h(r, t)$. Ecuația de mișcare este atunci

$$\frac{\partial}{\partial r}(h \sigma_r) + \frac{h}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = \rho h \frac{Du}{Dt} \qquad (7.10)$$

unde ρ este densitatea constantă (datorită incompresibilității) $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r}$, iar u este componenta radială a vitezei. Pentru că în *I*, $\sigma_\theta = 0$ și ținînd seama de (7.6), ecuația (7.10) devine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{K^2}{h} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{K^2}{r} = 0 \qquad (7.11)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $K^2 = \frac{\sigma_s}{\rho}$. La această ecuație se adaugă ecuația de continuitate

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial r} + h\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{hu}{r} = 0. \tag{7.12}$$

Ecuațiile (7.11) și (7.12) formează un sistem de tip hiperbolic. Caracteristicele și relațiile diferențiale satisfăcute pe ele sînt

$$C_+ (\sigma = \beta = \text{const.}): \frac{dr}{dt} = u + K \quad \text{și} \quad u + K \ln (rh) = 2p(\beta)$$

$$C_- (\sigma = \alpha = \text{const.}): \frac{dr}{dt} = u - K \quad \text{și} \quad u - K \ln (rh) = -2q(\alpha) \tag{7.13}$$

unde p și q sînt constante de-a lungul caracteristicelor C_+ și respectiv C_-.

Cîteodată frontiera dintre domeniile *I* și *II* poate deveni undă de șoc. Atunci pentru determinarea saltului vitezei și a grosimii plăcii prin trecerea acestei frontiere, se utilizează teorema conservării masei și a cantității de mișcare.

În continuare, în articolul său, *Freiberger* dă o soluție «simplă» prin unde, pentru cazul cînd deschiderea circulară se lărgește cu accelerația constantă f, viteza inițială fiind nulă, iar deschiderea fiind inițial punctiformă. Legea de mișcare a circumferinței este deci $r = \frac{1}{2} ft^2$. Soluție «simplă» prin unde, se numește soluția pentru care una din familiile de caracteristice (7.13) este o familie de drepte. Freiberger presupune că caracteristicele C_+ sînt drepte. Pe ele sînt satisfăcute primele două relații diferențiale (7.13). Din presupunerea făcută, rezultă deci că de-a lungul caracteristicelor, $u = \text{const.}$ și $rh = \text{const.}$ Deci ecuațiile acestor caracteristice se pot scrie sub formă finită; ele sînt o familie de drepte ce admit o înfășurătoare. Datorită existenței acestei înfășurătoare, există posibilitatea apariției undelor de șoc. Freiberger consideră că aceste unde de șoc trebuie să apară înainte de formarea înfășurătoarei, și-i calculează ecuația. Se pare totuși că frontul undei de șoc, de cele mai multe ori se suprapune peste înfășurătoare. *Freiberger* dă și unele diagrame din care se pot obține valorile lui u și h pentru orice valori ale lui r și t.

Un al doilea caz considerat este cel în care orificiul circular se lărgește la început cu viteză constantă, iar apoi după un anumit timp cu accelerație constantă. În cazul vitezei constante, după cum se știe, u și h depind numai de raportul $\frac{r}{t}$. Cunoscînd, din această

soluție, pe u și h de-a lungul ultimei caracteristice și pe u de-a lungul conturului, putem să determinăm în continuare pe u și h și pentru cazul accelerației constante. Rezolvarea problemei se reduce în fond la o ecuație de tipul ecuației telegrafiștilor, care însă este rezolvată prin metoda diferențelor finite.

d) În lucrarea sa, *Freiberger* a considerat numai propagarea undei de dilatare într-o placă cu orificiu circular. Problema propagării simultane într-o placă, a unei unde de dilatare și a unei unde de forfecare, a fost considerată în [45]. Ea corespunde cazului cînd pe peretele circular al orificiului se aplică forțe de dilatare, dar și de forfecare. Deci sînt diferite de zero componentele σ_r și σ_θ ale tensiunii, dar și componenta $\tau_{r\theta}$. Componentele σ_z, τ_{rz} și $\tau_{\theta z}$ sînt considerate neglijabile în comparație cu primele. Această problemă conduce deci la o stare plană de tensiuni. Considerînd placa subțire, componentele σ_r, σ_θ și $\tau_{r\theta}$ se înlocuiesc prin valorile lor medii.

Problema de mai sus este examinată considerînd trei teorii ale plasticității: teoria micilor deformații elasto-plastice (Hencky-Iliușin), teoria lui Prandtl-Reuss și teoria S. Venant-Lévy-Mises. În toate cazurile se presupune materialul incompresibil. Cazul materialului compresibil se poate considera în mod similar, calculele fiind însă mai complicate.

În cele ce urmează vom expune numai rezultatele ce se obțin cu ajutorul teoriei micilor deformații elasto-plastice, pentru un material incompresibil.

Întrucît problema este axial simetrică, notînd cu u și v componentele radiale și respectiv tangențiale ale deplasării, componentele diferite de zero ale deformației sînt:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) \tag{7.14}$$

iar ε_z va fi dat de condiția de incompresibilitate:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0. \tag{7.15}$$

Vom presupune că nici una din componentele deplasării nu poate fi neglijată în raport cu cealaltă.

Relațiile dintre tensiuni și deformații (v. Introducerea) sînt

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S}{E}\left(2\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{S}{2E}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) \end{aligned} \tag{7.16}$$

în care

$$E^2 = \varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_{r\theta}^2. \tag{7.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

Între cei doi invarianți pătratici ai deviatorului este dată o relație generală de forma

$$S = \mathcal{F}(E) \tag{7.18}$$

care va fi particularizată ulterior pentru diferite tipuri de materiale.

Ataşînd relațiile (7.16) la ecuațiile de mișcare, și ținînd seama de (7.17) și (7.18) obținem sistemul

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - P \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \Phi \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - M \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \Psi \end{aligned} \tag{7.19}$$

în care

$$\begin{aligned} L &= \frac{2S}{E} + \frac{ES' - S}{2E^3}(2\varepsilon_r + \varepsilon_0)^2 \\ M &= \frac{S}{2E} + \frac{ES' - S}{2E^3}\varepsilon_{r0}^2 \\ P &= \frac{ES' - S}{2E^3}(2\varepsilon_r + \varepsilon_0)\,\varepsilon_{r0} \end{aligned} \tag{7.20}$$

$$\Phi = \frac{S}{E}\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_0}{r} +$$

$$+ \frac{ES' - S}{2E^3 r}(2\varepsilon_r + \varepsilon_0)\,[(\varepsilon_r - \varepsilon_0)(2\varepsilon_0 + \varepsilon_r) - 2\varepsilon_{r0}^2] + X_r .$$

$$\Psi = \frac{2S}{Er}\varepsilon_{r0} + \frac{ES' - S}{2E^3 r}\varepsilon_{r0}\,[(\varepsilon_r - \varepsilon_0)(2\varepsilon_0 + \varepsilon_r) - 2\varepsilon_{r0}^2] + X_0$$

X_r și X_0 fiind componentele forțelor masice.

În afară de aceasta, vom mai utiliza notațiile $u_r = \frac{\partial u}{\partial r}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $v_r = \frac{\partial v}{\partial r}$ și $v_t = \frac{\partial v}{\partial t}$.

Adăugînd la sistemul (7.19) relațiile

$$\begin{aligned} du_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}dr + \frac{\partial u_r}{\partial t}dt \\ du_t &= \frac{\partial u_t}{\partial r}dr + \frac{\partial u_t}{\partial t}dt \end{aligned} \tag{7.21}$$

precum și cele corespunzătoare pentru v, obținem ușor caracteristicele acestui sistem

$$\rho^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^4 - \rho\,(L + M)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + LM - P^2 = 0. \tag{7.22}$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că există două tipuri de unde. Vitezele lor de propagare sînt

$$\left.\begin{matrix} c_{\mathrm{I}}^2 \\ c_{\mathrm{II}}^2 \end{matrix}\right\} = \frac{M + L \pm \sqrt{(M-L)^2 + 4P^2}}{2\rho}. \tag{7.23}$$

Se arată uşor că $L > 0$, $M > 0$ şi $LM - P^2 > 0$; rezultă că expresiile care dau cele două viteze sînt reale. Din (7.23) rezultă inegalitatea importantă

$$c_{\mathrm{I}}^2 > c_{\mathrm{II}}^2. \tag{7.24}$$

Există unele cazuri particulare (v. mai departe) cînd $LM = P^2$ şi deci cel puţin una din cele două viteze ar putea fi nulă.

Relaţiile diferenţiale satisfăcute pe caracteristicele (7.22) sînt

$$\begin{aligned} \{\Phi(M - \rho c^2) - \Psi P\}\, dt - \rho(M - \rho c^2)(c\, du_r - du_t) - \\ - \rho P(c\, dv_r - dv_t) = 0 \end{aligned} \tag{7.25}$$

în care c ia una din cele două valori date de (7.23), cu semnul plus sau minus.

Să notăm cu α şi β salturile derivatelor $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ şi $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$ la traversarea unui front de undă. Atunci din (7.19) obţinem

$$\begin{aligned} (\rho c_{\mathrm{I}}^2 - L)\,\alpha - P\beta = 0 \\ P\alpha + (\rho c_{\mathrm{II}}^2 - L)\,\beta = 0 \end{aligned} \tag{7.26}$$

dacă ţinem seama că pe fiecare din cele două familii de unde

$$\frac{P}{L - \rho c^2} = \frac{M - \rho c^2}{P}. \tag{7.27}$$

Să presupunem că condiţiile la limită sînt de aşa natură încît componentele deformaţiei satisfac în tot cursul procesului de deformare, relaţia $M < L$. Se arată atunci uşor, ţinînd seama şi de (7.27), că $|\rho c_{\mathrm{I}}^2 - L| \leqslant |P|$ şi $|\rho c_{\mathrm{II}}^2 - L| \leqslant P|$. Rezultă deci că în acest caz pe suprafeţele de discontinuitate de tip I, $\alpha > \beta$, iar pe cele de tip II, $\beta > \alpha$. Dacă $M > L$ situaţia evident se inversează; dacă $M = L$, $\alpha = \beta$ pe ambele unde. Să revenim la cazul $M < L$. Din (7.26) rezultă că deşi pe fronturile ambelor unde sînt discontinue atît derivatele lui u şi σ cît şi cele ale lui v şi τ, totuşi pe unda de tip I discontinuităţile derivatelor lui u şi σ sînt preponderente faţă de cele ale derivatelor lui v şi τ. Pe unda II situaţia se inversează. Deci în general, ambele unde sînt atît unde de dilatare cît şi de forfecare.

Scanned with OKEN Scanner

Există un caz particular, și anume cel corespunzător lui $P = 0$, cînd studiul celor două unde se poate face separat: pe prima nu vom avea decît discontinuități ale derivatelor lui u și σ, iar pe a doua numai discontinuități ale derivatelor lui v și τ.

În [45] au fost considerate două cazuri particulare: cazul cînd $v = 0$ și cazul $u = 0$. În primul caz nu mai rămîne propagabilă decît prima undă, care este o undă de dilatare. Viteza ei c_{I^*} scade însă datorită particularizării amintite, deci $c_{I^*} < c_{I^*}$ În al doilea caz, cînd $u = 0$, numai unda a doua este propagabilă; viteza ei însă crește: $c_{II^*} > c_{II^*}$

Dacă pe conturul circular al orificiului tensiunea nu a depășit limita de fluiditate a materialului respectiv, în placă se vor propaga două familii de unde elastice. Rezultatele de mai sus sînt aplicabile și acestor unde dacă particularizăm relația (7.18) sub forma

$$S = 2GE \tag{7.28}$$

unde G este modulul de forfecare. Ținînd seama de (7.28) obținem

$$M = G,\ P = 0,\ L = G,\ \Phi = \frac{4G}{r}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) + X_r \text{ și } \Psi = \frac{6G}{r}\varepsilon_{r\theta} + X_\theta.$$

Deci ambele familii de unde elastice se propagă cu viteza constantă

$$\frac{dr}{dt} = \pm c_0 = \pm\sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{7.29}$$

iar relațiile diferențiale satisfăcute pe caracteristicele (7.29) sînt pentru unda I:

$$\Phi\, dt + \rho\,[c_0\, du_r - du_t] = 0 \tag{7.30}$$

iar pe unda II:

$$\Psi\, dt + \rho\,[c_0\, dv_r - dv_t] = 0. \tag{7.31}$$

Ținînd seama de condiția de egalitate a diferențialelor du_r, du_t, dv_r și dv_t de o parte și alta a unui front de undă, condiție ce rezultă ușor din (7.21), putem integra relațiile (7.30) și (7.31) de-a lungul caracteristicelor (7.29). Problema revine la o problemă mixtă, dacă se dau datele pe circumferința orificiului și pe frontul undelor. Pe frontul undelor I, de exemplu, presupunînd că forțele masice sînt nule, se obține distribuția de deformații și viteze

$$u_r = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{2G}{c_0^2\rho}} \cdot u_r^0 \quad \text{și} \quad u_t = -c_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{2G}{c_0^2\rho}} \cdot u_t^0\ , \tag{7.32}$$

unde am notat cu indicele «zero» valorile entităților respective pe circumferința orificiului. Din (7.32) rezultă că pe frontul undelor

cilindrice, u_r și u_t descresc cînd r crește. Considerații similare se fac și pentru undele II.

Rezolvarea problemei în domeniul plastic, după depășirea limitei de fluiditate, se face în mod similar. Integrarea sistemului de ecuații diferențiale este mult mai grea și nu se poate face în general decît numeric. Pe frontul undelor plastice trebuie să fie satisfăcută și condiția de fluiditate $E = \gamma_s$, ce rezultă din (7.17). După depășirea limitei de fluiditate, pentru integrarea efectivă, trebuie să se precizeze funcția ce intervine în (7.18). În [44] [45] s-a considerat cazul materialelor perfect plastice ($S' = 0$), cazul materialelor consolidabile liniar [$S = \tau_s + 2G_1(E - \gamma_s)$] și al materialelor consolidabile exponențial ($S = hE^n$).

În toate aceste materiale sînt propagabile ambele tipuri de unde. În cazul particular al materialelor perfect plastice, cînd $u = 0$, nu este propagabilă totuși nici una din cele două unde.

În unele cazuri, chiar cînd există ambele tipuri de unde, deși la începutul lovirii cele două componente ale deplasării sînt de același ordin de mărime, datorită faptului că cele două unde se propagă cu viteze diferite și că pe fronturile lor sînt preponderente discontinuitățile pentru una sau alta dintre componente, după un timp relativ scurt vom putea cîteodată neglija pe fiecare din aceste unde, una din componentele deplasării. În felul acesta, după un anumit interval de timp de la începutul lovirii, putem să considerăm că problema se reduce la integrarea a două ecuații de tipul ecuației undelor și nu la integrarea sistemului (7.19).

Cu ajutorul teoriei lui Prandtl-Reuss se obțin rezultate similare cu cele de mai sus [45]. Teoria lui S. Venant-Lévy-Mises conduce însă fie la fronturi de undă propagabile instantaneu, fie la unde staționare. Și teoria lui Henky-Iliușin poate conduce la fronturi de undă propagabile instantaneu, dacă placa considerată este mărginită de două plăci rigide astfel încît se poate considera $\varepsilon_z = 0$.

e) O problemă și mai complicată de lovire a unei plăci subțiri a fost considerară în [44]. Problema considerată este următoarea. O placă plană este traversată de un ax cilindric circular care face corp comun cu ea. La momentul inițial putem imprima acestui cilindru un moment de răsucire care să provoace deformații plastice în placă, sau putem să-l deplasăm brusc în direcția axei sale, deplasare care de asemenea ar putea provoca deformații plastice, sau în sfîrșit cilindrul se poate dilata brusc (explozie). În lucrarea citată s-a considerat problema acțiunii simultane a acestor trei factori. Se arată, după cum se putea bănui, că în acest caz în placă se vor propaga trei tipuri de unde plastice. Este foarte greu, din cauza dificultăților de calcul, să se studieze propagarea simultană a celor

Scanned with OKEN Scanner

trei tipuri de unde. Se pot însă considera trei probleme particulare, care corespund neglijării lui u, a lui v sau a lui w. Unele dintre concluziile obținute pentru aceste cazuri particulare pot da oarecare indicații referitoare la cazul general.

Pentru exemplificare, vom expune pe scurt în cele ce urmează, cazul cînd deplasarea radială $u = 0$ [50]. Se presupune că inițial placa este plană și se află în repaus. La momentul $t = 0$, pe cilindrul circular $r = r_0$ sînt aplicate niște forțe ce provoacă numai deplasările tangențiale v și w. În cele ce urmează vom presupune că aceste două deplasări sînt aproximativ de același ordin de mărime; în orice caz, nici una din ele nu este neglijabilă în raport cu cealaltă. Legile de variație în timp a tensiunilor $\tau_{r\theta}(r_0, t)$ și $\tau_{rz}(r_0, t)$ de-a lungul orificiului circular, se presupun date.

Vom aplica teoria plasticității a lui Henky-Iliușin.

Componentele deformației sînt

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial r} \tag{7.47}$$

iar celelalte componente vor fi neglijate.

Relațiile dintre tensiuni și deformații în cadrul teoriei micilor deformații elasto-plastice sînt

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{E}{S}\tau_{r\theta}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{E}{S}\tau_{rz} \tag{7.46}$$

iar invariantul pătratic al deviatorului deformațiilor este

$$E^2 = \varepsilon_{r\theta}^2 + \varepsilon_{rz}^2. \tag{7.47}$$

Între acest invariant și invariantul pătratic al deviatorului tensiunilor există o relație de forma (7.18).

Ecuațiile de mișcare sînt

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} - \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= X_\theta \\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} - \frac{\tau_{rz}}{r} &= X_z. \end{aligned} \tag{7.48}$$

Introducînd (7.46) în (7.48), obținem sistemul

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - M\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - R\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= \Psi \\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - R\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - N\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= \chi \end{aligned} \tag{7.49}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$M = \frac{S}{2E} + \frac{ES' - S}{2E^3}\,\varepsilon_{r\theta}^2$$

$$R = \frac{ES' - S}{2E^3}\,\varepsilon_{r\theta}\,\varepsilon_{rz}$$

$$N = \frac{S}{2E} + \frac{ES' - S}{2E^3}\,\varepsilon_{rz}^2$$

$$\Psi = \frac{\varepsilon_{r\theta}}{rE}\left[S - \frac{ES' - S}{E^2}\,\varepsilon_{r\theta}^2\right] + X_\theta$$

$$\chi = \frac{\varepsilon_{rz}}{rE}\left[S - \frac{ES' - S}{E^2}\,\varepsilon_{r\theta}^2\right] + X_z.$$

Caracteristicele sistemului (7.49) sînt

$$\rho^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^4 - \frac{\rho}{2}\left(S' + \frac{S}{E}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{S'S}{4E} = 0. \qquad (7.50)$$

Obţinem deci două familii de suprafeţe de discontinuitate ce sînt propagabile respectiv cu vitezele

$$c_{II}^2 = \frac{S}{2\rho E}$$
$$c_{III}^2 = \frac{S'}{2\rho}. \qquad (7.51)$$

De aici rezultă că în domeniul elastic $c_{II}^2 = c_{III}^2 = \frac{G}{\rho}$, deci ambele unde se propagă cu aceeaşi viteză constantă. Rezultă de asemenea că pentru materialele consolidabile liniar viteza c_{III} este de asemenea constantă: $c_{III}^2 = \frac{G_1}{\rho}$, unde G_1 este un modul constant de consolidare; în materialele perfect plastice, unda III nu se mai propagă, iar unda II are viteză de propagare descrescătoare cu creşterea lui E. La materialele a căror curbă $S \sim E$ are concavitatea dirijată spre axa S, există şi posibilitatea transformării undelor II şi III în unde de şoc.

Din (7.51) rezultă imediat

$$c_{II}^2 > c_{III}^2.$$

Relaţiile diferenţiale satisfăcute pe caracteristicele (7.51) sînt

$$[\Psi(N - \rho c^2) - \chi R]\,dt + \rho\,(N - \rho c^2)\,(c\,dv_r - dv_t) - \rho R\,(c\,dw_r - dw_t) = 0. \qquad (7.52)$$

Scanned with OKEN Scanner

Expresia lor se simplifică mult pentru unele cazuri particulare. Distribuţia de deformaţii şi viteze se poate obţine prin integrarea numerică a relaţiilor (7.52) de-a lungul caracteristicelor (7.50), dacă mai ţinem seama şi de condiţia de continuitate a deplasărilor dv_r, dv_t, dw_r şi dw_t, precum şi de condiţia de plasticitate pe frontul undelor plastice $(\varepsilon_{r\theta}^2 + \varepsilon_{rz}^2 = \gamma_s)$.

Revenind la relaţiile (7.49) şi notînd cu β şi γ salturile derivatelor $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$ şi $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ la traversarea unei suprafeţe de discontinuitate, obţinem uşor pentru unda II

$$\varepsilon_{r\theta}\,\beta + \varepsilon_{rz}\,\gamma = 0 \tag{7.53}$$

şi pentru unda III

$$\varepsilon_{rz}\,\beta - \varepsilon_{r\theta}\,\gamma = 0. \tag{7.54}$$

Să presupunem că condiţiile la limită sînt de aşa natură încît avem totdeauna $|\varepsilon_{rz}| > |\varepsilon_{r\theta}|$. Atunci din (7.53) rezultă că pe suprafeţele II, $\beta > \gamma$, iar din (7.54) că pe suprafeţele de discontinuitate III, $\beta < \gamma$. Din condiţiile (7.53) şi (7.54) rezultă că atît pe frontul undelor II cît şi pe frontul undelor III sînt discontinue derivatele secunde ale lui v şi w şi derivatele prime ale lui $\tau_{r\theta}$ şi τ_{rz}. Pe frontul undei II însă, discontinuităţile derivatelor lui w şi τ_{rz} sînt mai mici decît discontinuităţile corespunzătoare ale derivatelor lui v şi $\tau_{r\theta}$. Pe frontul undei III situaţia se inversează. Dacă datorită condiţiilor la limită $|\varepsilon_{rz}| < |\varepsilon_{r\theta}|$ atunci situaţia pe ambele fronturi se inversează. În cazul în care $|\varepsilon_{rz}| = |\varepsilon_{r\theta}|$, $\gamma = \beta$ pe ambele suprafeţe de undă. Din (7.53) şi (7.54) mai rezultă că discontinuităţile pe cele două unde sînt ortogonale.

Există trei cazuri particulare cînd discontinuităţile pe cele două unde se separă, în sensul că pe frontul undelor dintr-o anumită categorie sînt discontinue numai derivatele lui w şi τ_{rz}, iar pe frontul celorlalte unde sînt discontinue numai derivatele lui v şi $\tau_{r\theta}$. Aceste cazuri sînt: cazul cînd corpul este elastic, cazul cînd $\varepsilon_{rz} = 0$ sau în sfîrşit cazul $\varepsilon_{r\theta} = 0$.

Dacă materialul este elastic, $S = 2GE$, şi vitezele de propagare sînt $c_{II}^2 = c_{III}^2 = \frac{G}{\rho}$. Întrucît în acest caz $R = 0$, sistemul (7.49) se descompune în două ecuaţii de tipul ecuaţiei undelor. Pe unele din aceste suprafeţe de undă sînt discontinue numai derivatele lui v şi $\tau_{r\theta}$, iar pe celelalte numai derivatele lui w şi τ_{rz}.

Dacă $\varepsilon_{rz} = 0$, rezultă $R = 0$ şi deci din sistemul (7.49) rămîne numai prima ecuaţie. În acest caz particular nu mai rămîne propagabilă decît unda de tip III. Pe suprafeţele de discontinuitate respective suferă discontinuităţi derivatele secunde ale lui v şi deri-

Scanned with OKEN Scanner

vata primă a lui $\tau_{r\theta}$. Deci pe unda III nu mai rămîn propagabile decît acele discontinuităţi care în cazul general (cînd $\varepsilon_{rz} \neq 0$ dar $|\varepsilon_{rz}| < |\varepsilon_{r\theta}|$) erau preponderente pe această undă. De remarcat că viteza de propagare c_{III}, formal nu este influenţată de particularizarea amintită.

Dacă $\varepsilon_{r\theta} = 0$, rezultă de asemenea $R = 0$, iar din sistemul (7.49) nu mai rămîne decît ecuaţia a doua. Şi în acest caz particular nu mai rămîne propagabilă decît tot unda de tip III. Pe suprafeţele de undă corespunzătoare sînt discontinue derivatele lui w şi τ_{rz}. Deci rămîn propagabile numai acele discontinuităţi care în cazul general (cînd $\varepsilon_{r\theta} \neq 0$ dar $|\varepsilon_{rz}| > |\varepsilon_{r\theta}|$) erau preponderente.

În toate cazurile particulare de mai sus, studiul complet al undelor de forfecare se poate face destul de uşor.

Să revenim la cazul general ($R \neq 0$) şi să facem unele particularizări referitoare la tipul materialului considerat. Pentru materialele perfect plastice, $S' = 0$ şi deci undele de tip III nu mai sunt propagabile. Pe suprafeţele de undă de tip II sînt discontinue atît derivatele lui v şi $\tau_{r\theta}$ cît şi derivatele lui w şi τ_{rz}. Dacă însă una din componentele ε_{rz} sau $\varepsilon_{r\theta}$ ale deformaţiei este neglijabilă, şi unda de tip II încetează de a mai fi propagabilă. În materialele consolidabile (liniar, exponenţial etc.) ambele tipuri de unde rămîn propagabile în toate cazurile.

Rezultate analoge se obţin şi cu ajutorul teoriei lui Prandtl-Reuss.

f) O interesantă aplicaţie a teoriei pînzelor subţiri la studiul dinamic al deformării plăcilor a fost făcută de *H. Hopkins* şi *W. Prager* [81]. Se face presupunerea obişnuită în teoria pînzelor subţiri că tensiunile de încovoiere şi tensiunile tangenţiale, paralele cu suprafaţa plăcii, depăşesc simţitor tensiunile tangenţiale normale la suprafaţa plăcii. După cum am văzut mai sus, tocmai aceste ultime tensiuni sînt considerate ca fiind preponderente, în lucrările lui *Bahşian* şi *Kocetkov*. *Hopkins* şi *Prager* ţin seama de aceste ultime tensiuni în ecuaţia de mişcare, prin intermediul forţei tăietoare, totuşi în condiţia de plasticitate ele sînt neglijate. Placa este presupusă circulară şi liber rezemată. Ea este supusă unei sarcini uniform distribuită, ce este aplicată instantaneu. Sarcina este menţinută constantă în decursul unui interval oarecare de timp şi apoi este înlăturată brusc.

Ecuaţia de mişcare este

$$\frac{d}{dr}(rM) - N = rQ = -\int_0^r (p - \mu w_{tt}) r dr \qquad (7.55)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $M = \int_{-h}^{+h} \sigma_r z dz$ este momentul încovoietor produs de tensiunea radială, $N = \int_{-h}^{+h} \sigma_\varphi z dz$ este momentul încovoietor produs de tensiunile σ_φ, w este săgeata, μ — masa, p este intensitatea sarcinii aplicată, Q — forţa tăietoare care acţionează pe unitatea de lungime a unei suprafeţe cilindrice de rază r (pentru cazul static $Q = \int_{-h}^{+h} \tau_{rz}\, dz$), iar $2h$ este grosimea plăcii. Au fost alese coordonate cilindrice, originea fiind luată în centrul plăcii nedeformate, iar axa z este dirijată vertical în jos.

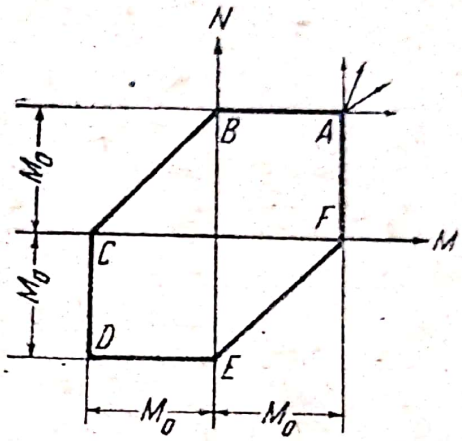

Fig. 57

Ecuaţia (7.55) este o generalizare pentru cazul dinamic, al unei ecuaţii considerate tot de *Hopkins* şi *Prager* [82] pentru cazul static. La această ecuaţie este adăugată condiţia de plasticitate a lui Tresca şi legea de curgere ataşată. Condiţia de plasticitate se reprezintă în «planul tensiunilor» M, N printr-un exagon (fig. 57). Materialul este presupus plastic-rigid; dacă punctul de coordonate M, N se află în interiorul exagonului materialul este rigid; dacă el se află pe exagon, materialul este plastic[1]). Fiecărui punct de pe exagon, deci fiecărei stări de fluiditate, i se ataşează «vectorul curgere» ale cărui componente $\varkappa$ şi λ sînt date de

$$\varkappa = -w_{rr}, \qquad \lambda = -\frac{1}{r} w_{rt} \tag{7.56}$$

şi care se poate reprezenta geometric astfel: pentru punctele de pe interiorul unei laturi a exagonului, acest vector este perpendicular pe ea; la punctele de la capetele laturilor, acest vector poate fi perpendicular uneia sau alteia din laturi, dar poate lua şi toate poziţiile intermediare. În toate cazurile el este dirijat spre exteriorul exagonului. De exemplu pentru latura AB vom avea:

în A: $\qquad M = N = M_0; \qquad \varkappa \geqslant 0, \qquad \lambda \geqslant 0 \qquad (7.57)$

[1]) O extindere a unei asemenea teorii, pentru cazul cînd problema nu mai este axial simetrică, a fost făcută de *H. G. Hopkins* [253], [254].

pe AB: $0 < M < M_0$, $N = M_0$; $\varkappa = 0$; $\lambda \geqslant 0$ (7.58)

în B: $M = 0$, $N = M_0$, $0 \geqslant \varkappa \geqslant -\lambda$. (7.59)

Datorită acțiunii sarcinii uniform distribuită $p = p(t)$, o parte din placă, începînd de la centrul ei, va deveni plastică. Vor exista deci două regiuni: una în care placa se comportă ca un corp rigid și alta în care ea este plastică. Cele două regiuni vor fi despărțite printr-o «articulație circulară». În general vor exista mai multe asemenea articulații circulare ce vor despărți regiuni cu stări diferite.

Se presupune că inițial placa este plană ($w(r, 0) = 0$) și se află în repaus ($w_t(r, 0) = 0$). La momentul $t = 0$ se aplică brusc sarcina uniform distribuită p. Deplasarea $w(r, t)$ și momentele $M(r, t)$ și $N(r, t)$ trebuie determinate astfel încît în tot domeniul $0 \leqslant r \leqslant R$ și pentru toți $t \geqslant 0$ trebuie să fie satisfăcute unele condiții date mai jos. Să presupunem deocamdată că sarcina $p(t)$ este continuă.

1°. Săgeata w și viteza w_t sînt continue în raport cu r și t; derivatele w_r, w_{rr}, w_{rt} și w_{tt} sînt continue pe porțiuni în raport cu r și continue în raport cu t; discontinuitățile în raport cu r pot să aibă loc numai pe articulațiile circulare. Prin traversarea unei articulații circulare staționare (nepropagabile) w_r și deci și w_{rr} și w_{rt} pot fi discontinue, dar accelerația w_{tt} trebuie să fie continuă. Prin traversarea unei articulații circulare nestaționare, derivata w_r trebuie să fie continuă, dar w_{rr}, w_{rt} și w_{tt} pot fi discontinue, salturile respective satisfăcînd relațiile:

$$[w_{rt}] + \rho_t [w_{rr}] = 0 \tag{7.60}$$

$$[w_{tt}] + \rho_t [w_{rt}] = 0 \tag{7.61}$$

unde $r = \rho(t)$ este raza articulației circulare, iar ρ_t viteza ei de propagare.

2°. Momentul M este continuu în raport cu r și t; derivatele M_r și M_t sînt continue pe porțiuni în raport cu r și t; discontinuitățile în raport cu r au loc numai pe articulațiile circulare. Aceste discontinuități trebuie să satisfacă ecuația

$$[M_t] + \rho_t [M_r] = 0. \tag{7.62}$$

Momentul N este continuu pe porțiuni în raport cu r și continuu în raport cu t.

3°. w, M și N satisfac ecuația de mișcare (7.55). În acest caz, dacă circumferința din apropierea conturului plăcii nu se mișcă ca un corp rigid (cînd $w_{rt} = 0$, deci w_t nu depinde de r), în centrul plăcii trebuie ca $M = N = M_0$.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Punctele M, N sînt situate sau în interiorul sau pe hexagonul limită (fig. 57). În primul caz, în tot domeniul în care starea de tensiune este reprezentată prin punctele interioare ale exagonului limită, trebuie să avem $w_{rt} = 0$. În al doilea caz $\varkappa$ și λ, precum și momentele încovoietoare, trebuie să satisfacă legea de curgere (7.57) — (7.59).

5°. Pe frontiera $M(R, t) = 0$, $w(R, t) = 0$ pentru orice $t \geqslant 0$.

6°. În momentul inițial $w(r, 0) = 0$, $w_t(r, 0) = 0$ pentru $0 \leqslant r \leqslant R$.

Dacă sarcina $p(t)$ este discontinuă, atunci toate entitățile examinate mai sus, cu excepția lui w și w_t, vor suferi discontinuitățile corespunzătoare în raport cu t.

Autorii au arătat [82] că în condițiile de mai sus, deformațiile dinamice plastice apar numai dacă încărcarea depășește o anumită limită:

$$p > p_0 = \frac{6 M_0}{R^2}. \tag{7.63}$$

Pentru sarcini satisfăcînd (7.63), sînt totuși de considerat două cazuri: « sarcina medie » cînd $p_0 < p < 2p_0$ și sarcini « mari » cînd $p > 2p_0$.

α) $(p_0 < p < 2p_0)$. În acest caz vom distinge două faze: În prima $(0 < t < \tau)$ sarcina este aplicată; în a doua $(\tau < t < T)$ ea nu mai este aplicată (τ este timpul cît este aplicată sarcina, iar T timpul în care placa revine la starea de repaus).

În prima fază, cînd datorită sarcinii p_0 curgerea este lentă, planul median, inițial plan, devine conic. Putem pune deci

$$w(r, t) = W(t)\left[1 - \frac{r}{R}\right]. \tag{7.64}$$

Cu această presupunere, ecuația de mișcare (7.55) se poate integra ușor. Se obține

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{pr^2}{p_0 R^2} + \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)\frac{r^2}{R^2}\left(2 - \frac{r}{R}\right). \tag{7.65}$$

În a doua fază, deși $p = 0$, datorită energiei cinetice, mișcarea continuă pînă la disiparea acestei energii. În acest caz se utilizează de asemenea (7.42), dar funcția inițial nedeterminată W are altă expresie.

β) $(p > 2p_0)$. Se arată ușor cu ajutorul formulei (7.65) că $M(0, t) = M_0$ este valoarea maximă a lui M numai dacă $p < 2p_0$; pentru $p > 2p_0$ această valoare reprezintă un minim. Deci pentru

$p > 2p_0$ într-o circumferință $0 \leqslant r < \rho_0$ din centrul plăcii, M va avea tendința de a depăși valoarea M_0. Pentru că materialul este perfect plastic, autorii presupun că în această circumferință $M = N = M_0$ (deci starea de tensiune din punctul A), iar în restul plăcii starea de tensiune este cea de pe AB. Din (7.55) obținem

$$w_{tt} = \frac{p}{\mu}, \qquad 0 \leqslant r < \rho_0. \tag{7.66}$$

Deci zona centrală se mișcă cu o accelerație ce nu depinde de r și t. Ca și în cazul sarcinilor medii, din punct de vedere al tratării matematice se deosebesc trei faze: $0 < t < \tau$, $\tau < t < T_1$, $T_1 < t < T_2$ în care T_1 este timpul cînd raza $\rho(\tau) = \rho_0$ devine zero: $\rho(T_1) = 0$; iar T_2 este timpul cînd placa revine în stare de repaus.

O problemă similară cu cea de mai sus a fost considerată de *A. Wang* și *H. Hopkins* [234]. Ei consideră cazul plăcii circulare încastrate, iar încărcarea este diferită de cea considerată mai sus. Se presupune că la momentul inițial se aplică instantaneu o viteză constantă întregii plăci $w(r, 0) = v_0$; conturul rămîne însă nemișcat $w_t(R, t) = 0$. Inițial placa era plană $w(r, 0) = 0$ pentru $0 \leqslant r \leqslant R$. Faptul că placa este încastrată impune în afară de condiția $w(R, t) = 0$ și condiția $w_{rt}(R, t) = 0$ sau $|M(R, t)| = M_0$. Restul condițiilor, precum și felul de tratare a problemei sînt similare cu cele de mai sus.

Studiul încărcării dinamice a pînzelor cilindrice (tuburi subțiri) utilizînd metode asemănătoare cu cele din [81], adică utilizînd ecuațiile pînzelor subțiri, a fost făcut de *G. Eason* și *R. T. Shield* [59]. Se consideră de asemenea că materialul este plastic-rigid, satisfăcînd o condiție de tip Tresca, iar încărcarea axial simetrică este considerată de două tipuri: forțe concentrate distribuite pe un cerc și presiune uniform distribuită pe o bandă. Încărcările dinamice depășesc limita statică de rezistență, dar ele nu acționează decît într-o perioadă scurtă de timp.

g) Problema lovirii cu viteză constantă a unei membrane subțiri infinită, cu un con rigid, a fost studiată de *D. M. Grigorian* [69]. El utilizează pentru aceasta rezultatele lui *Rahmatulin* [171] privitoare la lovirea firului. O problemă similară a fost considerată ulterior de *J. W. Craggs* [249]. Se consideră de asemenea că placa subțire este infinită și că ea este străpunsă normal cu ajutorul unui con rigid ce se mișcă cu viteză uniformă.

Studiul deformațiilor plastice ale unor diafragme subțiri metalice, utilizate la anumite explozii submarine, a fost făcut de *G. E. Hudson* [86].

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. PROPAGAREA UNDELOR ÎN BARE

a) Teoria propagării undelor elasto-plastice în bare, așa cum a fost descrisă în cap. I, era o teorie unidimensională ce se poate aplica la propagarea undelor longitudinale în bare subțiri sau chiar în fire. În acest caz energia cinetică și tensiunile tangențiale legate de mișcarea transversală a materialului se neglijează. *D. S. Wood* [242] a atras atenția că aceasta se poate face numai în cazul barelor subțiri. Dacă bara este groasă, sau dacă ea este înfășurată într-un manșon rigid, mișcarea transversală nu mai este posibilă. *D. S. Wood* a studiat propagarea undelor longitudinale în bare de acest tip. Se consideră în calcule atît tensiunile longitudinale σ_x, cît și cele perpendiculare pe direcția axei x, σ_y. Datorită simetriei se presupune că σ_y și ε_y sînt aceiași în orice direcție ce se află într-un plan perpendicular pe axa x.

Se fac trei presupuneri. Componentele elastice ale deformațiilor satisfac legea lui Hooke:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^e &= \frac{1}{E}(\sigma_x - 2\,\mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y^e &= \frac{1}{E}[(1-\mu)\,\sigma_y - \mu\sigma_x]. \end{aligned} \tag{7.67}$$

Pe de altă parte se face presupunerea obișnuită că volumul este incompresibil plastic

$$\varepsilon_x^p + 2\varepsilon_y^p = 0\,. \tag{7.68}$$

În sfîrșit, relația dintre tensiuni și deformații se consideră de forma

$$\sigma_x - \sigma_y = \sigma(\varepsilon_x^p) \tag{7.69}$$

în care funcția $\sigma(\varepsilon_x^p)$ se determină din experiențele obișnuite de întindere-compresiune.

În cazul barelor groase, avem însă $\varepsilon_y = 0$ și deci $\varepsilon_y^e = -\varepsilon_y^p = \frac{1}{2}\varepsilon_x^p$. Din (7.67) și (7.68) obținem

$$\sigma_x = \frac{1-\mu}{1-2\mu}\,\sigma(\varepsilon_x^p) + \frac{1}{2}\,\frac{E}{1-2\mu}\,\varepsilon_x^p \tag{7.70}$$

și

$$\varepsilon_x^e = \frac{1}{2}\,\varepsilon_x^p + \frac{1+\mu}{E}\,\sigma(\varepsilon_x^p). \tag{7.71}$$

În domeniul pur elastic, este satisfăcută relația

$$\sigma_x = E\,\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\,\varepsilon_x\,. \tag{7.72}$$

Ultimele trei relaţii dau legătura dintre σ_x şi ε_x şi deci permit calcularea vitezei de propagare a undelor longitudinale, conform formulei $c^2 = \frac{1}{\rho}\frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x}$.

Consideraţiile de mai sus au fost aplicate unui anumit aliaj de aluminiu, pentru care $E = 0{,}74 \cdot 10^6$ kg/cm^2, $\mu = 0{,}33$, $\rho = 2{,}77$ g/cm^3, $c_0 = 6{,}25 \cdot 10^3$ m/s şi $c_1 = 5{,}11 \cdot 10^3$ m/s. *Wood* arată că viteza c_1 a undelor plastice este numai cu 18% mai mică decît viteza c_0 a undelor elastice. În teoria unidimensională ea reprezenta de-abia a zecea parte din viteza undelor elastice.

Wood dă şi o interpretare fizică a rezultatelor de mai sus. El presupune că tensiunea se poate considera compusă din tensiunea datorită compresibilităţii hidrostatice şi cea legată de rezistenţa la forfecare. Prima din aceste componente satisface relaţia

$$\sigma_{xh} = K\varepsilon_{xh} = \sigma_{yh} \qquad \left(K = \frac{E}{3(1-2\mu)}\right) \tag{7.73}$$

iar viteza de propagare a undelor longitudinale este

$$c_h = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \tag{7.74}$$

Pentru aluminiu ea devine $c_h = 5{,}08 \cdot 10^3$ m/s şi deci diferă foarte puţin de c_1. De aici rezultă interpretarea fizică făcută de *Wood* şi posibilitatea de a înlocui relaţiile (7.70) — (7.72) prin relaţia

$$\sigma_x = K\varepsilon_x + \frac{2}{3}\sigma(\varepsilon_x^p)$$

în care primul termen corespunde componentei hidrostatice a tensiunii, iar cel de al doilea este legat de rezistenţa la forfecare.

b) Problema propagării undelor plastice de torsiune în bare a fost considerată de *H. Wolf* [241]. Rezultatele sînt aplicabile atît barelor cu secţiune circulară cît şi tuburilor circulare. Este interesant de remarcat că în cadrul acestei probleme, dacă materialul rămîne elastic ecuaţia de mişcare este liniară şi conţine o singură variabilă spaţială. Dacă însă materialul devine plastic, ecuaţia de mişcare nu mai este liniară şi în ea intervin două variabile spaţiale.

c) O interesantă aplicaţie a teoriei propagării undelor elasto-plastice în bare subţiri a fost făcută de *E. H. Lee* şi *A. J. Wang* [122]. Ei aplică această teorie la studiul propagării undelor în bare elastice ce posedă o frecare interioară de gen Coulomb. În timpul încărcării este satisfăcută o relaţie liniară de forma $\sigma = E_1\varepsilon$, iar descărcarea este compusă din două porţiuni: pe prima $\varepsilon =$ constant, iar pe a doua $\sigma = E_2\varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

Fronturile undelor de încărcare vor fi drepte şi se vor propaga cu viteza $c_1 = \sqrt{\frac{E_1}{m}}$. Undele de descărcare însă vor fi de două feluri: unde elastice obişnuite ce se propagă cu viteza $c_2 = \sqrt{\frac{E_2}{m}}$ mai mare decît viteza c_1, şi unde propagabile instantaneu. Pentru rezolvarea problemei se utilizează metoda caracteristicelor şi ecuaţia cantităţii de mişcare. Teoria este făcută pentru a fi aplicată la studiul propagării undelor de încărcare şi descărcare în arcuri inelare.

Problema propagării undelor elastice în arcuri spirale este studiată de mult. Ea conduce la studiul undelor elastice, liniare obişnuite. În acest caz se presupune însă că spirele arcului nu intră în contact unele cu altele. *E. H. Lee* [115] a studiat şi cazul cînd datorită unei compresiuni puternice spirele arcului vin în contact unele cu altele. El consideră două cazuri: contactul dintre spire se face inelastic sau elastic. În primul caz se presupune că arcul se poate deforma elastic numai pînă la o anumită deformaţie maximă ε_{max}. După atingerea acestei deformaţii, oricît de mult ar creşte tensiunea, deformaţia rămîne constantă. Deci curba $\sigma \sim \varepsilon$ va fi compusă din două drepte, concavitatea figurii fiind dirijată spre axa tensiunilor. De aici ideea de a utiliza teoria propagării undelor de şoc în bare. Dacă viteza V_0 de impact este suficient de redusă, spirele nu se lovesc şi în arc se propagă unde elastice obişnuite, deformaţia fiind dată de $V_0 = c_0 \varepsilon$. Dacă viteza de impact V_1 este mare, avem $V_1 = c\, \varepsilon_{max}$ şi de la începutul lovirii spirele intră în contact. În spatele frontului undei ce se propagă, toate spirele vor fi în contact unele cu altele, şi se mişcă cu viteza V_1. Pornind de la aceste consideraţii se poate aplica teoria obişnuită a propagării undelor (elastice obişnuite, sau de şoc), şi se poate studia problema reflectării lor. În cel de al doilea caz, al contactului elastic, principiul după care sînt făcute calculele este următorul: prima spiră după lovirea celei de a doua nu rămîne în contact cu ea, ci îi comunică o viteză de două ori mai mare (şoc elastic). Cea de a doua spiră loveşte cea de a treia etc. Astfel se propagă un front de undă, cu viteza $c > c_0$. În spatele ei se propagă şi unda elastică cu viteza c_0.

§ 3. PROBLEMA AXIAL SIMETRICĂ

a) 1°. De problema propagării undelor cilindrice elasto-plastice s-a ocupat *H. A. Rahmatulin* [174]. Problema considerată de el este următoarea: într-un spaţiu elasto-plastic nemărginit se află încastrat un ax cilindric rigid. La un moment dat acestui ax i se

aplică un moment de răsucire, ce provoacă deformaţii plastice propagabile în spaţiul înconjurător.

Să notăm cu $w = w(r, t)$ deplasarea tangenţială, τ — tensiunea de forfecare şi cu ρ — masa specifică. Ecuaţia momentului cantităţii de mişcare pentru un cilindru cu raza interioară r şi cea exterioară $r + dr$, este

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau). \tag{7.75}$$

Ţinînd seama că

$$\tau = \tau(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad \varepsilon = \frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} \tag{7.76}$$

(7.75) devine

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + b \qquad \left(b = \frac{c^2 w}{r^2} - \frac{c^2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2\tau}{\rho r} \right). \tag{7.77}$$

Caracteristicele şi relaţiile diferenţiale satisfăcute pe ele sînt

$$dr = \pm c\, dt, \quad dw_t = \pm c\, dw_r + b\, dt. \tag{7.78}$$

Condiţiile iniţiale şi la limită sînt

$$w_t = w_r = 0 \text{ pentru } t = 0, \; r_0 \leqslant r < \infty; \; \varepsilon = f(t) \text{ pentru } r = r_0.$$

H. A. Rahmatulin a arătat că întîi se propagă o undă cilindrică elastică cu viteza c_0. Această undă se propagă pînă la o distanţă finită. Pe frontul undelor elastice $r = r_0 + c_0 t$, avem

$$w_r = -\varepsilon_s \sqrt{\frac{r_0}{r}}, \qquad w_t = c_0 \varepsilon_s \sqrt{\frac{r_0}{r}} \tag{7.79}$$

iar pe frontul $r = r_0 + c_1 t$ al undelor plastice $\varepsilon = \varepsilon_s$. Soluţia în domeniul elastic se obţine prin integrarea numerică de-a lungul caracteristicelor a ecuaţiilor (7.78) (după transformarea lor în ecuaţii cu diferenţe), ţinînd seama de datele pe cele două fronturi.

În domeniul plastic se presupune că materialul este consolidabil liniar. Pentru a afla pe w_r şi w_t pe frontiera domeniului plastic se integrează relaţia diferenţială (7.78), care pentru consolidare liniară devine

$$dw_t = \pm c_1\, dw_r + \left[\frac{c_1^2}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) - \frac{2\varepsilon_s (c_0^2 - c_1^2)}{r} \right] dt. \tag{7.80}$$

La ea se ataşează şi condiţia de continuitate a lui dw. Notînd cu indicele « zero » valorile din domeniul elastic, această condiţie devine

$$w_t - w_t^0 = -(w_r - w_r^0)\, c_1. \tag{7.81}$$

Scanned with OKEN Scanner

Eliminînd pe w_t din (7.81) şi (7.80) obţinem o ecuaţie ce poate fi integrată de-a lungul lui $r = r_0 + c_1 t$. Se obţin totuşi expresii complicate.

Rahmatulin arată că unda de şoc se propagă numai pînă la o anumită distanţă care nu depinde de legea după care creşte sarcina aplicată, ci numai de valoarea ei iniţială.

În lucrare se consideră şi procesul de descărcare. Acesta are loc dacă momentul de răsucire aplicat instantaneu scade apoi monoton în timp. Consolidarea este presupusă tot liniară. Presupunîndu-se că încărcarea este instantanee, unda de descărcare este $r = r_0 + c_0 t$. În domeniul de descărcare este satisfăcută de asemenea (7.75) în care $\tau = \tau_0 + E\ (\varepsilon - \varepsilon_0)$.

În general însă, unda de descărcare diferă de dreapta $r = r_0 + c_1 t$.

2°. O problemă similară de propagare a undelor cilindrice în materiale vîsco-plastice de tipul celor introduse de *Iliuşin* [91] a fost considerată de *F. A. Bahşian* [15] şi de *V. V. Sokolovski* [210], [212].

În lucrarea lui *Bahşian*, relaţia dintre tensiune şi deformaţie este de forma

$$\tau = \pm k + \mu \varepsilon_{r\theta} \tag{7.82}$$

în care k este o constantă plastică, iar μ coeficientul de viscozitate, şi ecuaţia de mişcare este

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + 2\frac{\tau}{r} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \tag{7.83}$$

în care v este viteza şi $\varepsilon = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$. Ecuaţia de mişcare devine deci

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) - \frac{2k}{r}. \tag{7.84}$$

Materialul vîsco-plastic umple un tub circular de rază exterioară $R\ (t)$, raza interioară r_0 fiind chiar raza axului rigid. Deci condiţiile iniţiale şi la limită vor fi

$$\begin{aligned} &v\ (r,0) = f_1\ (r) && \text{pentru } t = 0 \\ &v\ (r_0, t) = \psi_1\ (t) && \text{pentru } r = r_0 \\ &v\ (R, t) = 0,\ \frac{\partial v}{\partial r} = 0 && \text{pentru } r = R\ (t). \end{aligned} \tag{7.85}$$

Bahşian integrează ecuaţia (7.84) pentru condiţiile (7.85), presupunînd că cilindrul rigid se roteşte uniform sau după o lege oarecare. Se folosesc metode operaţionale.

Scanned with OKEN Scanner

V. V. Sokolovski a considerat că relația dintre tensiuni și deformații este tot de tipul (7.82). Se presupune că mediul vîsco-plastic ocupă exteriorul unui cerc de rază r_0 pe care sînt date tensiunile tangențiale $\tau\ (r_0, t)$ sau vitezele $v\ (r_0, t)$. Sistemul de ecuații obținut, analog cu sistemul (7.82), (7.83), se integrează prin metoda diferențelor.

3°. O problemă interesantă de dinamica pămînturilor argiloase a fost considerată de *A. I. Ișlinski, N. V. Zvolinski* și *I. Z. Stepanenko* [94].

Ei pornesc de la experiențele lui *N. M. Sîlîi*, care făcînd o gaură mică circulară (de 10—15 cm), dar suficient de adîncă, o lărgea apoi mult (pînă la 1 m) printr-o explozie. Astfel s-a observat că în jurul găurii, datorită presiunii foarte mari, densitatea pămîntului crește foarte mult (pînă la 30%). În felul acesta, cu ajutorul unei explozii s-ar putea face puțuri de mină de cîteva zeci de metri adîncime. Autorii de mai sus rezolvă matematic tocmai această problemă. Se pornește de la schema de deformare a pămînturilor propusă de *A. I. Ișlinski*. El consideră că pentru presiuni ce nu depășesc o anumită presiune p_s, caracteristică pămîntului dat, pămîntul se comportă ca un lichid ideal incompresibil de densitate ρ_0. Pentru presiuni egale cu p_s se produce creșterea densității de la ρ_0 la ρ_1, iar pentru presiuni ce depășesc pe p_s pămîntul se deformează din nou ca un lichid ideal incompresibil, avînd însă de data aceasta densitatea constantă ρ_1. Corespunzător cu cele trei situații, pămîntul din jurul găurii va fi împărțit în trei regiuni. Pentru fiecare în parte vom avea alte ecuații și alte condiții la limită. Finalmente problema revine la integrarea unei ecuații diferențiale neliniare (se presupune că regiunea din mijloc degenerează într-un cerc). Ea este integrată pentru un caz particular de *Stepanenko*. Pentru cazul $p_1 \gg p_s$, *Zvolinski* reduce această ecuație la una mai simplă de al doilea ordin, ce se poate integra în unele cazuri particulare, prin funcții elementare.

4°. Problema încărcării bruște a tuburilor de lungime infinită, printr-o presiune interioară uniform distribuită ce rămîne apoi constantă, a fost considerată de *E. H. Agababian* [1], [2].

În [1] se consideră că materialul este incompresibil: $\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0$ unde $u\ (r,t)$ este deplasarea radială, unica posibilă. Din această condiție rezultă $u = \frac{C\ (t)}{r}$, unde $C\ (t)$ este o funcție nedeterminată. Este găsită soluția din domeniul elastic, de unde se obține și valoarea limită a presiunii interioare, necesară pentru a trece materialul în stadiul plastic.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația de mișcare în domeniul plastic este

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \rho \frac{C''(t)}{r} + \frac{2\tau_s}{r}.$$

Această ecuație este integrată, folosind condiția la limită $r = a$, $\sigma_r = -P$, unde a este raza interioară a tubului, iar P — presiunea dată pe această suprafață. Funcția $C(t)$ este determinată la rîndul ei din condiția ca pe frontiera elasto-plastică tensiunea din domeniul elastic să fie egală cu cea din domeniul plastic. Materialul este presupus perfect plastic, satisfăcînd condiția de plasticitate

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2\tau_s.$$

Rezultatele obținute sînt particularizate pentru cazul cînd $P = 0$, adică pentru cazul cînd asupra suprafeței interioare se acționează cu un impuls. Se examinează și cazul cînd, impulsul fiind suficient de mare, tot tubul devine plastic.

Este considerată și problema descărcării. În timpul descărcării materialul satisface legea lui Hooke, iar ecuația de mișcare este integrată cu condițiile la limită $\sigma_r = 0$ pentru $r = a$ și $r = b$ (b — raza exterioară).

În [2] *Agababian* examinează aceeași problemă însă pentru materiale compresibile. Volumul este presupus compresibil elastic

$$\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = 3K(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z).$$

Materialul este de asemenea presupus perfect plastic, satisfăcînd aceleași condiții de plasticitate. Ecuația de mișcare care se obține este de tip hiperbolic și de forma (7.77), în care

$$c^2 = \frac{3\lambda + 2\mu}{3(\lambda+2\mu)}\left[1 + \frac{2\tau_s}{3\lambda + 2\mu}\frac{a\dfrac{u}{r}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{u}{r}\right)^2}\right].$$

Studiul propagării se face cu ajutorul metodei caracteristicelor, considerațiile fiind similare cu cele din lucrările expuse mai sus. Este cercetat și procesul de descărcare, provocat de o undă reflectată de descărcare. Se studiază absorbirea ei de către undele directe.

b) Dacă cilindrului care intervine în problema lui *Rahmatulin* i se aplică, în afară de un moment de răsucire, și o dilatare radială bruscă, problema este mult mai complexă. Ea a fost considerată în [44] și [46]. S-au utilizat teoriile lui Henky-Iliușin, Prandtl-Reuss și S. Venant-Lévy-Mises.

Scanned with OKEN Scanner

Să aplicăm în primul rînd teoria micilor deformaţii elasto-plastice a lui Henky-Iliuşin. Problema este evident axial simetrică; de aceea vom alege un sistem cilindric de coordonate. Pe de altă parte, datorită faptului că mediul este nemărginit, deformaţiile vor fi plane. Vor fi deci diferite de zero componenta radială u a deplasării şi componenta tangenţială v. Componentele deformaţiei sînt

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \qquad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right). \tag{7.86}$$

Materialul este presupus compresibil elastic

$$\sigma = 3K\varepsilon \tag{7.87}$$

cu $\sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}$ şi $\varepsilon = \frac{\varepsilon_r + \varepsilon_\theta}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right)$. Componentele deviatorului tensiunilor sînt

$$s_r = \sigma_r - K\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right), \qquad \tau = \frac{S}{2E}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right). \tag{7.88}$$

Cei doi invarianţi pătratici sînt

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{u}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)^2 \\ S^2 &= \frac{1}{6}\left[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2\right] + \tau_{r\theta}^2 . \end{aligned} \tag{7.89}$$

Între ei există o relaţie de forma

$$S = \mathfrak{F}(E) \tag{7.90}$$

care caracterizează proprietăţile mecanice ale materialului respectiv.

Ecuaţiile de mişcare, precum şi relaţiile dintre tensiuni şi deformaţii sînt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + X_r \\ \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{2\tau}{r} &= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + X_\theta \\ e_r &= \frac{E}{S}s_r \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{E}{S}\tau. \end{aligned} \tag{7.91}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scoţînd componentele tensiunilor din ultimele două ecuaţii şi introducîndu-le în primele, obţinem sistemul

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - N \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \Phi \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - P \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \Psi \end{aligned} \tag{7.92}$$

în care

$$M = \frac{2S}{3E} + K + \frac{ES' - S}{18E^3}\left[2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta\right]^2$$

$$N = \frac{ES' - S}{6E^3}(2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)\,\varepsilon_{r\theta}$$

$$P = \frac{S}{2E} + \frac{ES' - S}{2E^3}\varepsilon_{r\theta}^2$$

$$\Phi = \left[\frac{K}{r} - \frac{S}{3rE} - \frac{ES' - S}{18rE^3}(2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)(\varepsilon_r - 2\varepsilon_\theta)\right](\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) -$$

$$- \frac{ES' - S}{3rE^3}(2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)\,\varepsilon_{r\theta}^2 + X_r$$

$$\Psi = -\frac{ES' - S}{6rE^3}(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)\,\varepsilon_{r\theta} +$$

$$+ \left(-\frac{S}{rE} - \frac{ES' - S}{rE^3}\varepsilon_{r\theta}^2\right)\varepsilon_{r\theta} + X_\theta .$$

Adăugînd la ecuaţiile (7.92) relaţiile (7.21) se obţin ecuaţiile celor două familii de caracteristice

$$\rho^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^4 - \rho\,(M + P)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + M\,P - N^2 = 0. \tag{7.93}$$

Vitezele de propagare ale celor două familii de suprafeţe de discontinuitate sînt

$$\left.\begin{matrix} c_1^2 \\ c_2^2 \end{matrix}\right\} = \frac{M + P \pm \sqrt{(M - P)^2 + 4N^2}}{2\rho}. \tag{7.94}$$

Relaţiile diferenţiale satisfăcute pe caracteristicele (7.93) sînt

$$[\Phi(\rho c^2 - P) + N\Psi]\,dt + \rho(\rho c^2 - P)(c\,du_r - du_t) + \rho\,N(c\,dv_r - dv_t) = 0. \tag{7.95}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din cauza asemănării formale dintre sistemele (7.19) şi (7.92) consideraţiile ulterioare se pot face în mod cu totul similar cu cele făcute în p. d, § 1 al acestui capitol.

În [46] şi [44] au fost făcute consideraţii similare cu cele de mai sus, folosind teoria Prandtl-Reuss şi teoria S. Venant-Lévy-Mises. Se compară rezultatele obţinute cu aceste diferite teorii.

§ 4. UNDE PLANE, SFERICE, SUPRAFEŢE DE DISCONTINUITATE

a) Problema propagării perturbaţiilor plane de forfecare în materiale vîsco-plastice ce ocupă semiplanul $x > 0$ şi limitate de axa $x = 0$, pe care este dată legea de variaţie a tensiunii tangenţiale $\tau_{xy} = \tau_{xy}(t)$ sau a vitezei $v_y = v_y(t)$, a fost studiată de *V. V. Sokolovski* [212]. Relaţia dintre tensiune şi deformaţie este de tipul relaţiei (7.2). Sînt considerate două probleme. În prima condiţiile iniţiale şi la limită sînt $v_y = 0$ pentru $t = 0$; $\tau_{xy} = \tau_{xy}^0$ pentru $x = 0$ şi $0 < t < t_0$; $\tau_{xy} = 0$ pentru $x = 0$ şi $t > t_0$. Se obţine o ecuaţie de tip parabolic, iar soluţia este obţinută prin metode numerice. În cea de a doua problemă condiţiile iniţiale şi la limită sînt: $v_y = 0$ pentru $t = 0$; $v_y = v_y^0$ pentru $x = 0$ şi $0 < t < t_0$; $\tau_{xy} = 0$ pentru $x = 0$ şi $t > t_0$. Se obţine de asemenea o ecuaţie de tip parabolic, iar soluţia este obţinută de asemenea prin metode numerice.

Propagarea undelor plane într-un material care de asemenea ocupă un semispaţiu, dar a cărui relaţie $\sigma \sim \varepsilon$ este neliniară a fost considerată de *G. I. Barenblatt* [16]. Relaţia dintre tensiune şi deformaţie este de forma: $\sigma = \rho_0 V^2 \varphi(\varepsilon)$, unde V este o constantă iar φ este o funcţie oarecare (cu derivata de al doilea ordin continuă). Notînd cu u deplasarea de-a lungul axei Ox, condiţiile iniţiale şi la limită sînt: $u(x, 0) = 0$ şi $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ pentru $t = 0$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha$ pentru $x = 0$, unde α este o constantă adimensională. Se obţine o ecuaţie de tip hiperbolic, iar soluţia ei este găsită printr-o metodă utilizată de *Sedov* [200]. Deplasarea este dată de $u = -Vtf\left(\frac{x}{Vt}\right)$, unde f este o anumită funcţie, determinată cu ajutorul unei ecuaţii diferenţiale obişnuite. Cazul $\varphi'' \leqslant 0$ a fost considerat de *H. A. Rahmatulin* [174]. În acest caz intervin unde de tip Riemann. *Barenblatt* consideră cazul $\varphi'' \geqslant 0$, cînd frontul undelor devine undă de şoc. Pe această suprafaţă sînt deci satisfăcute ecuaţia conservării masei şi cantităţii de mişcare. În aceeaşi lucrare, *Barenblatt* consideră şi cazul cînd φ'' îşi schimbă semnul.

Scanned with OKEN Scanner

Problema propagării undelor plane de forfecare în corpuri elasto-vîsco-plastice a fost considerată şi de *A. I. Gubanov* [70]. Relaţia între tensiuni şi deformaţii, considerată de el, este

$$\left(\alpha + \tau \frac{d}{dt} + \nu \frac{d^2}{dt^2}\right) s = s_0 + 2\left(G + \eta \frac{d}{dt} + \mu \frac{d^2}{dt^2}\right) e$$

unde s şi e sînt cei doi deviatori. *Gubanov* consideră că forţele de inerţie în procesele de forfecare în corpuri elasto-vîsco-plastice nu joacă un rol prea mare şi deci ele se pot neglija. Problema cercetată este aceea a mişcării unui strat de material, cuprins între planele $z = 0$ şi $z = h$. Într-o primă problemă se consideră că pe planul $z = h$ este dată deplasarea ca funcţie de timp. Este considerat apoi şi cazul cînd pe fiecare unitate de arie de pe planul $z = h$ este aplicată o tensiune de forfecare a cărei variaţie în timp este apoi cunoscută. În sfîrşit, o ultimă problemă considerată este aceea a lovirii tangenţiale a planului $z = h$ cu un corp, ce posedă masa m pe unitatea de arie şi viteza iniţială v_0; este interesant de remarcat că în acest caz se ţine seama de inerţia corpului care loveşte, deşi inerţia materialului din strat este neglijată.

Studiul propagării undelor plane elasto-plastice în corpuri ce satisfac teoria lui Reusse pentru cazul consolidabil a fost făcut de *J. W. Craggs* [250]. El pune în evidenţă două tipuri de asemenea unde: unde «lente» şi unde «rapide», după mărimea vitezelor de propagare. Se studiază de asemenea interacţiunea dintre diferitele tipuri de unde.

b) Propagarea undelor elasto-plastice sferice a fost considerată de *L. V. Altşuler* [9], *F. A. Bahşian* [14] şi *I. L. Lunţ* [132]. Aceste unde pot apărea în cazul unor explozii ce se produc într-un mediu solid, care este practic nelimitat.

Altşuler consideră mişcarea unui material, considerat perfect plastic, în cazul unei explozii polar simetrice. Ecuaţia de mişcare este

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \tag{7.96}$$

iar condiţia de plasticitate este de tip Tresca:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -|\sigma_0|. \tag{7.97}$$

Introducînd (7.97) în (7.96) şi neglijînd pe $\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}$, se obţine

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{2|\sigma_0|}{r} = \rho \frac{\partial v_r}{\partial t}. \tag{7.98}$$

La această ecuație *Altșuler* adaugă condiția de continuitate, scrisă sub forma

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} = K\left[\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r}\right] \tag{7.99}$$

unde K este modulul compresibilității de volum. Ecuațiile (7.98) și (7.99) conduc la o ecuație de tipul ecuației undelor, dacă se folosește substituția

$$\sigma_r = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2\,|\sigma_0|\ln\frac{r}{k}\,; \qquad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\,. \tag{7.100}$$

Condițiile la limită considerate sînt

$v\ (a,\ t) = F\ (t)$ pe sfera interioară de rază a,

$\sigma_r\ (R) = -\dfrac{K}{c}\, v_r\ (R)$ pe frontul undelor (raza R)

unde c este viteza de propagare a undei.

Bahșian examinează mișcarea unui mediu elasto-plastic cuprins între două sfere concentrice de raze a și b. În particular se poate ca raza b a sferei exterioare să fie nemărginită. Ca mai înainte, se presupune că mișcarea este polar-simetrică. Teoria aplicată este teoria micilor deformații elasto-plastice, iar materialul este considerat perfect plastic. Ecuația de mișcare, presupunînd că deformațiile și deplasările sînt finite, este

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1+\frac{u}{r}\right)^2\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\left(1+\frac{u}{r}\right)\left(1+\frac{\partial u}{\partial r}\right)(\sigma_r - \sigma_\theta) \tag{7.101}$$

iar relațiile dintre tensiuni și deformații sînt

$$\sigma_r = 3K\varepsilon - \frac{2}{3}\sigma_i\,, \quad \sigma_r - \sigma_\theta = -\sigma_i\,, \quad \sigma = 3K\varepsilon$$

$$3\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\,, \quad e_i = \pm\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right), \quad \sigma_i = \sigma_s \tag{7.102}$$

în care u este deplasarea radială, r — coordonata lagrangeană a punctului, $\sigma_i = \sqrt{3}S$ este intensitatea tensiunilor tangențiale, $e_i = \dfrac{2}{\sqrt{3}}E$ intensitatea deformațiilor de forfecare.

Introducînd (7.102) în (7.101), obținem

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^3}\right) - \frac{2\sigma_s}{r} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,. \tag{7.103}$$

Folosind substituția

$$u = \frac{2}{3}\frac{\sigma_s}{k}\, r\ln r + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varphi}{r}\right), \tag{7.104}$$

ecuaţia (7.103) se reduce la o ecuaţie obişnuită a undelor, pentru funcţia necunoscută φ. Viteza de propagare a undelor plastice este constantă

$$c_p^2 = \frac{k}{\rho}.$$

Viteza undelor elastice este

$$c_e^2 = \frac{1}{\rho}\left[k + \frac{4}{3}G\right].$$

Problema considerată de *Bahşian* este următoarea: pe sfera interioară de rază a apare la momentul iniţial o presiune mare, care provoacă propagarea în mediu a două unde sferice concentrice, una elastică şi una plastică. În mediu vor exista: o zonă deformată elastic în care $e_i < e_s$ şi o alta deformată plastic în care $e_i \geqslant e_s$. Această ultimă zonă este mărginită interior de sfera de rază a iar exterior de frontul undei plastice pe care $e_i = e_s$.

În fiecare din aceste zone se rezolvă o ecuaţie de tipul ecuaţiei undelor; în soluţiile acestor ecuaţii intervin cîte două funcţii arbitrare. Cele două funcţii arbitrare ce intervin în soluţia din domeniul elastic se determină prin condiţia ca pe frontul undelor elastice, deplasarea să fie continuă, iar pe frontul undelor plastice să fie satisfăcută condiţia de plasticitate. În domeniul plastic cele două funcţii arbitrare se determină ţinînd seama de legea dată de variaţie a tensiunii σ_r pe frontiera interioară, precum şi de faptul că pe frontiera exterioară a zonei plastice deplasarea este continuă.

Lunţ a considerat de asemenea propagarea undelor sferice ce apar datorită aplicării unei încărcări polar simetrice asupra unei sfere, ce se află într-un spaţiu nemărginit. Se utilizează de asemenea teoria micilor deformaţii elasto-plastice [ecuaţiile (7.102)], cu deosebirea că între intensitatea tensiunilor tangenţiale şi intensitatea deformaţiilor de forfecare există o relaţie generală de forma $\sigma_i = F(e_i)$. Deci materialul este presupus consolidabil, curba $\sigma \sim e$ fiind convexă.

Condiţiile iniţiale şi la limită sînt aceleaşi ca şi mai sus:

$$u(r,t) = 0, \quad \frac{\partial u(r,t)}{\partial t} = 0 \qquad \text{pentru } t = 0$$

$$\sigma_r = p\ (t) < 0 \qquad \text{pentru } r = a$$

în care $p(t)$ este presiunea dată pe sfera interioară. *Lunţ* reduce problema la rezolvarea unui sistem de două ecuaţii diferenţiale cuasiliniare şi de tip hiperbolic, ale căror caracteristice şi relaţii diferenţiale caracteristice le calculează. Sînt determinate deplasările

Scanned with OKEN Scanner

în domeniul deformaţiilor elastice şi plastice pentru cazul încărcării. În particular se consideră consolidarea liniară, dată de schema lui Prandtl. Este determinată, în funcţie de mărimea presiunii iniţiale, raza pînă la care se propagă unda plastică de şoc. În unele domenii soluţia nu poate fi obţinută decît prin aproximaţii succesive.

Este examinată şi problema descărcării, pentru cazul cînd încărcarea este instantanee iar descărcarea monotonă. În unele domenii sînt de asemenea utilizate metode numerice de integrare.

Problema propagării undelor elasto-plastice sferice a fost considerată şi de *W. Goldsmith* [252]. Considerînd că asemenea unde pot lua naştere datorită unor detonaţii, autorul ia ca lege de variaţie a presiunii pe sfera de rază a, legea exponenţială $p = p_0 e^{-\alpha t}$, unde p_0 şi α sînt două constante ce se determină experimental. În lucrarea citată se ia $p_0 = 280\,000$ at şi $\alpha = 10^6\ s^{-1}$. Se fac presupunerile că materialul este consolidabil liniar, că deformaţiile sînt mici, iar relaţia tensiune-deformaţie este întreagă. Este considerată atît problema încărcării cît şi a descărcării elasto-plastice.

A. S. Kompaneeţ [107] a studiat problema propagării undelor sferice de şoc într-un mediu de genul nisipului. Se presupune că un asemenea mediu are iniţial densitatea ρ_0 şi are o rezistenţă mică la forfecare. Ajuns la densitatea ρ_1, mediul devine incompresibil şi plastic. În acest caz se presupune că mediul satisface condiţia de plasticitate a lui Prandtl: cea mai mare tensiune tangenţială depinde liniar de tensiunea normală medie

$$\sigma_r - \sigma_\theta = k + m\ (\sigma_r + 2\sigma_\theta) \tag{7.105}$$

unde σ_r şi $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ sînt tensiunile normale principale.

Se presupune că unda de şoc apare datorită unei explozii ce are loc într-un mic volum sferic de rază R_0.

Ecuaţiile de mişcare ale mediului densificat (densitatea ρ_1) sînt

$$\rho_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2\ (\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} \tag{7.106}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) = 0. \tag{7.107}$$

Din (7.105) — (7.107) se obţine soluţia

$$\sigma_r = -\frac{k}{3m} + \rho_1 \frac{\dot{\lambda}}{(\alpha - 1) r} - 2\ \rho_1 \frac{\lambda^2}{(\alpha - 4) r^4} + C(t)\, r^{-\alpha} \tag{7.108}$$

unde $\alpha = \dfrac{6m}{1 + 2m}$ iar $\lambda(t)$ şi $C(t)$ sînt funcţii arbitrare.

Scanned with OKEN Scanner

Condiţiile pe frontul undei de şoc sînt puse sub forma

$$\begin{aligned} \rho_0 \dot{R} &= \rho_1 [\dot{R} - u(R)] \\ \rho_0 \dot{R}^2 &= \rho_1 [\dot{R} - u(R)]^2 - \sigma_r(R) \end{aligned} \tag{7.109}$$

unde R este raza frontului undei de şoc.

Prèsiunea pe frontiera cavităţii care se lărgeşte este

$$p = -\sigma_r(R_0). \tag{7.110}$$

Raza cavităţii se obţine din legea de conservare a masei. Făcînd unele aproximaţii şi notînd cu R_0 raza iniţială a cavităţii obţinem

$$R_0 \approx R \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{1/3}. \tag{7.111}$$

Kompaneeţ presupune că în interiorul cavităţii materia se comportă ca un gaz ideal de coeficient adiabatic γ

$$p = p_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{-\gamma}. \tag{7.112}$$

Eliminînd pe $C(t)$ şi $\lambda(t)$ din (7.109) şi (7.110) se obţine o ecuaţie diferenţială pentru determinarea lui R. Ea este integrată prin cuadraturi, utilizînd sau nu, relaţia aproximativă (7.111).

În funcţie de presiunea iniţială, este calculată raza maximă pînă la care se propagă unda de şoc, precum şi timpul necesar pentru aceasta.

Problema propagării perturbaţiilor termo-vîsco-elastice sferice a fost studiată de *A. M. Katasonov* [255].

c) Studiul suprafeţelor singulare, adică al suprafeţelor de undă, ce pot exista în diferite tipuri de corpuri plastice, a fost făcut de mai mulţi autori. Ei au utilizat metodele generale iniţiate de *J. Hadamard* [71]. Majoritatea acestor lucrări se referă însă la cazul static.

Studiul diferitelor tipuri de discontinuităţi ce intervin în diferite probleme studiate în teoria plasticităţii a fost făcut de *W. Prager* [165]. Este ilustrat prin exemple, ce se întîlnesc în practică, rolul cîmpurilor discontinue de tensiuni şi viteze în teoria corpurilor perfect plastice. Se arată că cîmpurile discontinue examinate în literatură se împart în două clase. Cîmpurile din prima clasă satisfac toate ecuaţiile corpurilor perfect plastice şi pot exista chiar în realitate în aceste corpuri. Cîmpurile din a doua clasă nu satisfac anumite ecuaţii de bază; ele nu pot exista în corpuri perfect plastice, însă dau o descriere matematică simplă şi aproximativă a cîmpurilor de tensiuni şi viteze existente în aceste corpuri.

Scanned with OKEN Scanner

Independent de *W. Prager*, și alți autori au studiat caracterul diferitelor discontinuități ce apar în corpuri perfect plastice de tipul S. Venant-Lévy-Mises, în probleme dinamice sau statice (*T. Y. Thomas* [222], [223], *J. L. Ericksen* [60] și *J. W. Craggs* [40]). *J. W. Craggs* a examinat posibilitatea existenței unor suprafețe caracteristice în cazul tridimensional și static al teoriei lui S. Venant-Lévy-Mises. El arată că aceste suprafețe sînt în general izolate și cu ajutorul lor nu se pot obține metode generale de rezolvare a diferitelor probleme. Existența lor, totuși, indică prezența unor soluții plastice rigide cu discontinuități ale componentelor tensiunii și vitezei. *J. L. Ericksen* pentru aceeași teorie, dar pentru problema dinamică, studiază ce suprafețe singulare, de diferite ordine, pot exista în cazul tridimensional.

T. Y. Thomas [224] examinează problema suprafețelor caracteristice pentru teoria lui Prandtl-Reuss. El obține ecuațiile diferențiale ale acestor suprafețe.

Într-o lucrare recentă *T. Y. Thomas* [259] a considerat și problema propagării discontinuităților în corpuri perfect plastice de tip Mises sau Prandtl-Reuss, cînd pot fi eventual discontinue chiar derivatele densității, ale vitezelor sau ale tensiunilor.

Considerații privind propagarea undelor de dilatare și forfecare în corpuri de tip *Prager-Trifan* (v. [78], [228] și bibliografia indicată în aceste lucrări), pentru cazul tridimensional, au fost făcute de *M. N. Murta* [148]; iar pentru corpuri elastice neliniare (cu consolidare) de către *V. M. Babici* [12].

Un studiu general privind propagarea discontinuităților de primul și al doilea ordin ale unor funcții ce pot fi ele însele discontinue a fost făcut recent de *T. Y. Thomas* [260].

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE [1])

1. Агабабян, Е. Х., Напряжения в трубе при внезапном приложении нагрузки. Украинский Мат. Журн. V, 3, 1953, pp. 325—332.
2. Агабабян Е. Х., Динамическое расширение полого цилиндра в условиях идеальной пластичности. Укр. Мат. Журн., VII, 3, 1955, pp. 243—252.
3. Айнбиндер С. Б., К вопросу об определении динамического сопротивления металлов. Известия А. Н. Латв. СССР, № 1, 1951.
4. Айнбиндер С. Б., Об измерении динамической твердости металлов. Известия А. Н. Латв. СССР, № 8, 1952, pp.127—136.
5. Alfrey T., Механические свойства высокополимеров. Изд. иностр. лит. Москва, 1952.
6. Allen W., Mapes J. and Mayfield E., Shock Waves in Air Produced by Elastic and Plastic Waves in a Plate. J. Appl. Phys. 26, 1, 1955, pp. 125—126.
7. Alter B.E.K. and Curtis C. W., Effect of Strain Rate on the Propagation of a Plastic Strain Pulse Along a Lead Bar. J. Appl. Phys., 27, 9, 1956, pp. 1079—1085.
8. Alverson R. C., Impact with Finite Acceleration Time of Elastic-Plastic Beams. J. Appl. Mech., 23, 3, 1956, pp. 411—415.
9. Альтшулер Л. В., О взрыве в сжимаемой пластичной среде. ДАН, 52, 3, 1946, pp. 199—202.
10. Арутюнян Н. Х., Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехтеоретиздат, Москва-Ленинград, 1952.
11. Astbury N. F., Some theoretical considerations on the dynamic properties of plastics. Proc. Roy. Soc., Series A, vol. 196, 1949, pp. 92—105.
12. Бабич В. М., Об уравнениях нелинейно-упругой среды. ДАН, 97, 1, 1954, pp. 41—44.
13. Бахшиян Ф. А., К вязко-пластическому течению при ударе цилиндра по пластинке. ПММ, XII, 1, 1948, pp. 47—52.
14. Бахшиян Ф. А., Упруго-пластическая сферическая волна нагружения. ПММ, XII, 3, 1948, pp. 281—286.

[1]) Lucrările indicate cu « asterisc » nu au fost găsite de autor; rezultatele parţiale sau totale cuprinse în aceste lucrări au putut fi cunoscute prin intermediul altor lucrări.

Lucrările cu numerele de ordine [245] — [261] au fost adăugate la Bibliografie după predarea manuscrisului la Editură.

Scanned with OKEN Scanner

15. Бахшиян Ф. А., Вращение жесткого цилиндра в вязко-пластической среде. ПММ, XII, 6, 1948, pp. 749—756.
16. Баренблатт Г. И., О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций. ПММ, XVII, 4, 1953, pp. 455—460.
17. Бартенев Г. М., К теории деформации резины. Ж.Т.Ф., XXII, 7, 1952.
18. Bell J. F., Determination of Dynamic Strain through the Use of Diffraction Gratings. J. Appl. Phys., 27, 10, 1956, pp. 1109—1113.
19. Berry D. S. and Hunter S. C., The propagation of dynamic stress in visco-elastic rods. J. Mech. Phys. Solids, 4, 2, 1956, pp. 72—95
20. Безухов Н. И., Теория упругости и пластичности. Гостехтеоретиздат, Москва, 1953.
21. Bland D. R. and Lee E. H., Calculation of the Complex Modulus of Linear Viscoelastic Materials from Vibrating Reed Measurements. J. Appl. Phys., 26, 12, 1955, pp. 1497—1503.
22. Bland D. R. and Lee E. H., On the Determination of a Viscoelastic Model for Stress Analysis of Plastics. J. Appl. Mech., 23, 3, 1956, pp. 416—420.
23. Blum J. I., The measurement of dynamic stresses induced in projectiles during the penetration of armor plate. IXe Congrès International de Mécanique Appliquée, Bruxelles — 1956.
24. Bridgman P. W., The physics of high pressure. G. Bell and Sons. Ltd., London, 1949.
25. Broberg K. B., Studies on Scabbing of Solids Under Explosive Attack. J. Appl. Mech. 22, 3, 1955, pp. 317—323.
26.* Campbell W. R., Determination of dynamic stress-strain curves from strain waves in long bars. Proc. Soc. Exp. Stress Anal. 10 (1), 1952.
27. Campbell W. R., Dynamic stress-strain curves for mild steel using the tangent modulus procedure. J. of the Wash. Ac. of Sci. 43, 4, 1953, pp. 102—103.
28. Campbell J. D. and Duby J., The yield behaviour of mild steel in dynamic compression. Proc. Roy. Soc., Series A, vol. 236, 1956, pp. 24—40.
29. Carrington W. E. and Gayler Marie L. V., The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress. III. Changens in microstructure caused by deformation under impact at high-striking velocities. Proc. Roy. Soc., Series A., vol. 194, 1948, pp. 323—331.
30*. Чебан В. Г., О распространении продольных упруго-пластических волн. Уч. зап. Кишиневск. гос. ун-та, № 5, 1952.
31. Чебан В. Г., Продольное соударение упруго-пластических стержней. Вест. М.Г.У., № 6, 1952, pp. 15—21.
32. Чебан В. Г., Случай упруго-пластического соударения стержней из различных материалов. ПММ, XVII, 2, 1953, pp. 200—210.
33. Christoffel E. B., Über die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper. Annali di Matematica pura i applicata, Ser. II, t. VIII, 1877.
34. Cole J. D., Dougherty C. B. and Huth H. J., Constant-Strain Waves in Strings. J. Appl. Mech. 20, 4, 1953, pp. 519—522.
35. Conroy M. F., Plastic-Rigid Analysis of Long Beams Under Transverse Impact Loading. J. Appl. Mech. 19, 4, 1952, pp. 465—470.

Scanned with OKEN Scanner

36. Conroy M. F., Plastic-Rigid Analysis of a Special Class of Problems Involving Beams Subject to Dynamic Transverse Loading. J. Appl. Mech. 22, 1, 1955, pp. 48—52.
37. Conroy M. F., Plasting deformation of semi-infinite beams subject to transverse impact loading at the free end. J. Appl. Mech. 23, 2, 1956, pp. 239—243.
38. Courant R. and Friedrichs K. O., Supersonic flow and shock waves. Interscience, New York, 1948.
39.* Craggs J. W., Wave motion in plastic-elastic strings. J. Mech. Phys. Solids, 2, 4, 1954, pp. 286—295.
40. Craggs J. W., Characteristic surfaces in ideal plasticity in three dimensions. Q. J. Mech. and Appl. Math., 7, 1, 1954, pp. 35—39.
41. Cristescu N., Discontinuităţi în mişcarea firelor perfect flexibile şi elastice. Com. Acad. R. P.R. I, 6, 1951, pp. 439—445.
42. Cristescu N., Discontinuităţi în mişcarea firelor visco-elastice perfect flexibile. Rev. Univ. C. I. Parhon şi a Polit. din Bucureşti, Seria Şt. nat. nr. 1, 1952, pp. 68—71.
43. Cristescu N., О волнах нагрузки и разгрузки возникающих при движении упругой или пластической гибкой нити. ПММ, XVIII, 3, 1954, pp. 257—264.
44. Cristescu N., Asupra unor probleme dinamice ale teoriei plasticităţii. Dizertaţie, Bucureşti, 1955.
45. Cristescu N., Некоторые замечания относительно распространения пластических волн в пластинках (осесимметричный случай). ПММ, XIX, 4, 1955, pp. 433—442.
46. Cristescu N., Cîteva observaţii privind cazul deformaţiilor plane axial simetrice, al problemei dinamice a teoriei plasticităţii (teoria Prandtl-Reuss). Com. Acad. R.P.R., VI, 1, 1956, pp. 19—28.
47. Cristescu N., К распросуранониу волн в резине, ПММ, XXI, 6, 1957.
48. Cristescu N., Sur la propagation des ondes plastiques dans les barres d'acier. IXe Congrès International de Mécanique Appliquée, Bruxelles, 1956, T. VIII, pp 191—201.
49. Cristescu N., Распространение волн в гибких нитях (Влияние скорости деформации). ПММ, XXI, 4, 1957, pp. 486—490.
50. Cristescu N., Asupra deformării dinamice a plăcilor plastice (sub tipar).
51. Davies R. M., The determination of static and dynamic yield stresses using a steel ball. Proc. Roy. Soc., Series A, vol. 197, 1949, pp. 416—432,
52. Davies R. M., Strees Waves in Solids. Appl. Mech. Reviews. 6, 1, 1953 pp. 1—3.
53. Davies R. M., Stress waves in solids. Br. J. Appl. Phys., 7, 6, 1956, pp. 203—209.
54. Donnell L. H., Longitudinal Wave Transmission and Impact. Trans. ASME, 52, 1, 1930, pp. 153—167
55. Dove R. and Murphy G., Experimental Technique for Predicting the Dynamic Behaviour of Rubber-Trans. ASME, 77, 6, 1955, pp. 975—979.
56. Durelli A. J. and Riley W. F., Experiments for the determination of Transient Stress and Strain Distribution in Two-Dimensional Problems. J. Appl. Mech., 24, 1, 1957, pp. 69—76.
57. Duwez Pol, Physics of Solids — Plastic Flow. J. of the Aeronaut. Sci., 23, 5, 1956, pp. 435—437.

Scanned with OKEN Scanner

58. Duwez P. E., Clark D. S. and Bohnenblust H. F., The Behaviour of Long Beams Under Impact Loading. J. Appl. Mech., 17, 1,1950, pp. 27—34.
59. Eason G. and Shield R. T., Dynamic loading of rigid-plastic cylindrical shells. J. Mech. Phys. Solids, 4, 2, 1956, pp. 53—71.
60. Ericksen J. L., Singular surfaces in plasticity. J. Math. and Phys., XXXIV, 1, 1955, pp. 74—79.
61. Freiberger W, A., Problem in dynamic plasticity: the enlargement of a circular hole in a flat Sheet. Proc. Cambrig. Phil. Soc., vol. 48, part. 1, 1952, pp. 135—148.
62. Галин Г. Я., Об условиях на поверхностях сильных разрывов для упругих и пластических тел. ПММ, XIX, 3, 1955, pp. 368—370.
63. Gerard G. and Papino R., The impact tube technique for dynamic stress-strain measurements. IX International Congress of Applied Mechanics, Bruxelles, 1956.
64. Ghosh S. K., Dynamics of plastic deformations in a bar exhibiting strain-rate effect and subjected to alternating stresses. Indian Jour. of Phys., 27, 11, 1953, pp. 541—546.
65. Glauz R. D. and Lee E. H., Transient Wave Analysis in a Linear Time-Dependent Material. J. Appl. Phys., 25, 8, 1954, pp. 947—953.
66. Goranson R. W., Bancroft D., Burton B. L., Blechar Th., Houston E. E., Gittings E. F. and Landeen S. A., Dynamic Determination of the Compressibility of Metals. J. Appl. Phys., 26, 12, 1955, pp. 1472—1479.
67. Green A. E., Hypo-elasticity and plasticity. Proc. Roy. Soc., Series A., vol. 234, 1956, pp. 46—59.
68. Gross B. Mathematical structure of the theories of visco-elasticity. Actualités Scientifiques et Industrielles, Paris, Hermann, 1953.
69. Григорян Д. М., Нормальный удар по неограниченной тонкой мембране. ПММ, XIII, 3, 1949, pp. 277—284.
70. Губанов А. И., Механика упруго-вязко-пластических тел, II, Сдвиг. Ж.Т.Ф., XIX, 1, 1949, pp. 43—61.
71. Hadamard J., Leçons sur la propagation des ondes. Paris, Hermann, 1903.
72. Hanin H., Propagation of plane disturbances in an elastic viscous medium. IX International Congress of Applied Mechanics, Bruxelles, 1956.
73. Harris D. B. and White M. P., Comparison of the Hardening Produced in a Yield Point Steel by Uniaxial Loading Under Static and Under Dynamic Conditions. J. Appl. Mech., 21, 2, 1954, pp. 194—195.
74. Hawkyard J. B. and Freeman P., Streess-strain characteristics of metal at high rates of strain. Summarized procedings of a conference on stress analysis — Sheffield, september, 1955. Br. J. Appl. Phys., 7, 1, 1956, pp. 3—4.
75. Hencky H., ZAMM, 4, 4, 1924, pp. 323—334.
76. Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford, 1950.
77. Hillier K. W. and Kolsky H., An investigation of the dynamic elastic properties of some high polymers. Proc. phys. Soc. Lond. Sect. B., vol. 62, 1949, pp. 111—121.
78. Hodge P. and Prager W., A variational principle for plastic materials with strain-hardening. J. of. Math. and. Phys., vol. 27, 1948, p. 1—10.

Scanned with OKEN Scanner

79. Hohenemser K. und Prager W., Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua. ZAMM, 12, 4, 1932.
80. Hopkins H. G., On the behaviour of infinitely long rigid-plastic beams under transverse concentrated load. J. Mech. Phys. Solids, 4, 1, 1955, pp. 38—52.
81. Hopkins H. and Prager W., On the Dynamics of Plastic Circular Plates. ZAMP, V, 4, 1954. pp. 317—330
82. Hopkins H. and Prager W., Несущая способность круглых пластинок. Механика, 3, 1955, p. 100-111.
83. Hopkinson B., The Effects of Momentary Stresses in Metals. Proc. Roy. Soc. Series A., Vol. LXXIV, 1905, pp. 498—506.
84.* Hopkinson B., Collected Sci. Papers (1921), Cambridge, 1921.
85.* Hopkinson J., Collected Sci. Papers, vol. II, 1872, p. 316.
86. Hudson G. E., A Theory of the Dynamic Plastic Deformation of a Thin Diaphragm. J. Appl. Phys. 22, 1, 1951, pp. 1—11.
87. Hughes D. S. and Maurette Christian, Dynamic Elastic Moduli of Iron, Aluminium and Fused Quartz. J. Appl. Phys., 27, 10, 1956, pp. 1184—1186.
88. Hugoniot H., Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide, indéfini (première partie) J. de Math. pures et appl. t. III, 1887.
89. Hugoniot H., Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (seconde partie). J. de Math. pures et appl. t. IV, 1888.
90. Iacob Caius, Introducere matematică în mecanica fluidelor. Bucureşti, Ed. Acad. R.P.R., 1952.
91*. Ильюшин А. А., К вопросу о вязко-пластичном течении материала. Труды конф. по пластическим деформациям, 1938.
92. Ильюшин А. А., Пластичность. Москва, ОГИЗ, 1948.
93. Ишлинский А. Ю., Продольные колебания стержней при наличии линейного закона последействия и релаксации. ПММ, IV, 1, 1940, pp. 79—92.
94. Ишлинский А. Ю., Зволинский Н. В. и Степаненко И. З., К динамике грунтовых масс, ДАН, 95, 4, 1954, pp. 729—731.
95. Израелгит Г. Ш., Механические испытания резины и каучука. Госхимиздат, Москва-Ленинград, 1949.
96. Johnson J. E., Wood D. S. and Clark D. S., Dynamic Stress-Strain Relations for Annealed 2 S Aluminium Under Compression Impact. J. Appl. Mech., 20, 4, 1953, pp. 523—529.
97. Juhasz K. J. De, Graphical Analysis of Impact of Bars stressed above the Elastic Range. J. of the Franklin Institute, Part. I., vol. 248, 1, 1949, pp. 15—48; Part. II, vol. 248, 2, 1949, pp. 113—142.
98. Качанов Л. М., Механика пластических сред. ОГИЗ, Москва-Ленинград, 1948.
99. Качанов Л. М., Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, Москва-Ленинград, 1949.
100. Kármán Th. and Duwez Pol, The Propagation of Plastic Deformation in Solids. J. Appl. Phys., 21, 10, 1950, p. 987.
101. Кочетков А. М., О распространении упруго-вязко-пластических волн сдвига в пластинке. ПММ, XIV, 2, 1950, pp. 203—208.
102. Koiter W. T., Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. Quart. of Appl. Math., 11, 3, 1953, pp. 350—354.

Scanned with OKEN Scanner

103.* Kolsky H., An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading. Proc. phys. Soc. Lond., part. II, vol. 62, 1949, pp. 676—700.
104. Kolsky H., Attenuation of short mechanical pulses by high polymers. Proc. of the second Intern. Cong. of Rheology, London, 1954, pp. 79—84.
105. Kolsky H., Волны напряжения в твердых телах. Изд. иностр. лит., Москва, 1955.
106. Kolsky H., The Propagation of Stress Pulses in Visco-elastic Solids. The Phil. Mag., Ser. 8, 1, 8, 1956, pp. 693—710.
107. Компанеец А. С., Ударные волны в пластической уплотняющейся среде. ДАН, 109, 1, 1956, pp. 49—52.
108. Krafft J. M., Sullivan A. M. and Tipper C. F., The effect of static and dynamic loading and temperature on the yield stress of iron and mild steel in compression. Proc. Roy. Soc., Series A, vol. 221, 1954, pp. 114—127.
109. Lampariello G., Sull'impossibilità di propagazioni ondese nei fluidi viscosi. Atti della R. Accad. dei Lincei (6), XIII, 1 ser. 1931, pp. 688—691.
110. Лазуткин Д. Ф., Распространение упруго-пластических волн вдоль цилиндрического стержня. ПММ, XVI, 1, 1952, pp. 94—100.
111. Лебедев Н. Ф., О распространении волны разгрузки в случае линейного упрочнения. ПММ, XV, 5, 1951, pp. 625—628.
112. Лебедев Н. Ф., Распространение ударной волны в полубесконечном однородном стержне. Инж. Сбор., Т. XI, 1952, pp. 103—122.
113. Лебедев Н. Ф., Вторичная упруго-пластическая волна. ПММ, XVIII, 2, 1954, pp. 167—180.
114. Lee E. H., A boundary value problem in the theory of plastic Wave propagation. Q. of Appl. Math., X, 4, 1953, pp. 335—346.
115. Lee E. H., Wave propagation in helical compression springs. Proc. Fifth Symposium in Appl. Math. Mc. Grow-Hill Book, 1954, pp. 123—136.
116. Lee E. H., Stress Analysis in Viscoelastic Materials. J. Appl. Phys., 27, 7, 1956, pp. 665—672.
117. Lee E. H. and Bland D. R., The Analysis of Dynamic Tests of Visco-Elastic Materials. J. Soc. Plastic Engrs., 11, 7, 1955.
118. Lee E. H. and Kanter I., Wave Propagation in Finite Rods of Viscoelastic Material. J. Appl. Phys., 24, 9, 1953, pp. 1115—1122.
119. Lee E. H. and Morrison J. A., A Comparison of the Propagation of Longitudinal Waves in Rods of Viscoelastic Materials. J. of Polymer Sci., XIX, Issue no. 91, 1956, pp. 93—110.
120. Lee E. H. and Symonds P. S., Large Plastic Deformations of Beams Under Transverse Impact. J. Appl. Mech. 19, 3, 1952, 31 pp. 308—3 4.
121. Lee E. H. and Tupper S. J., Analysis of Plastic Deformation in a Steel Cylinder Striking a Rigid Target. J. Appl. Mech., 21, 1, 1954, pp. 63—72.
122. Lee E. H. and Wang A. J., Wave Propagation in an Elastic Rod Exhibiting Internal Coulomb Friction, Considered as a Model for a Ring Spring. J. Appl. Mech., 23, 3, 1956. pp. 367—372.
123. Lee E. H. and Wolf H., Plastic-Wave Propagation Effects in High-Speed Testing. J. Appl. Mech., 18, 4, 1951, pp. 379—386.

Scanned with OKEN Scanner

124. Ленский В. С., Об упруго-пластическом ударе стержня о жесткую преграду. ПММ, XIII, 2, 1949, pp. 165—170.
125. Ленский В. С., Об одной задаче распространения упруго-пластических волн. Вест. М.Г.У., № 3, 1949, pp. 17—22.
126. Ленский В. С., Метод построения динамической зависимости между напряжениями и деформациями по распределению остаточных деформаций. Вест. М.Г.У., № 5, 1951, pp. 13—20.
127. Ленский В. С. и Тарасова М. А., Определение динамической диаграммы «напряжения-деформации» резины. Вест. М.Г.У., № 12, 1950, pp. 31—33.
128. Levi-Civita T., Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes. Paris, Felix Alcan, 1932.
129. Levi-Pizzeti, Fluage, Plasticité, Précontrainte. Paris, Dunod, 1951.
130. Lévy M., Extrait du Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état; présenté le 20 juin 1870. J. de Math. pures et appl. sér. II, 16, 1871, pp. 369—372.
131. Ludwik P., Über den Einfluss der Deformationsgeschwindigkeit bei bleibenden Deformationen mit besonderer Berücksichtigung der Nachwirkungserscheinungen. Phisikalische Zeitschrift, vol. 10. 1909, pp. 411—417.
132. Луиц Я. Л., О распространении сферических волн в упруго-пластической среде. ПММ, XIII, в. 1, 1949, pp. 55—78.
133. Mallory H. Dean, Propagation of Shock Waves in Aluminium. J. Appl. Phys., 26, 5, 1955, pp. 555—559.
134. Malvern L. E., Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain rate effect. Q. Appl. Math., VIII, 4, 1951, pp. 405—411.
135. Malvern L. E., The Propagation of Longitudinal Waves of Plastic Deformation in a Bar of Material Exhibiting a Strain Rate Effect. J. Appl. Mech., 18, 2, 1951, pp. 203—208.
136. Marshall I. and Thomson A. B., The cold drawing of high polymers. Proc. Roy. Soc., Series A, vol. 221, 1954, pp. 541—557.
137. Mentel T. J., Plastic deformations due to dynamic loading of a beam with an attached mass. Canad. J. Technol. 33, 4, 1955, pp. 237—255.
138. Miklowitz J., The initiation and propagation of the plastic zone along tension specimen of nylon. J. Colloid Sc., 2, 1, 1947.
139. Minshall Stanley, Properties of Elastic and Plastic Waves Determined by Pin Contactors and Crystals. J. Appl. Phys. 26, 4, 1955, pp. 463—469.
140. Mises R., Механика твердых тел в пластически—деформированном состоянии. «Теория пластичности» .Сборник статей под ред. Работнова, Москва, 1948, pp. 57—69.
141. Moisil Gr. C., La mécanique analytique des systèmes continus. Thèse. Paris, Gauthier-Villars, 1929.
142. Moisil Gr. C., O definiţie invariantă a caracteristicilor unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale, Bul. Şt. Acad. R.P.R., Ser. Mat. Fiz. Chim., t. II, 9, 1950, pp. 683—686.
143. Moisil Gr. C., Shock-waves in a cable. IX International Congress of Applied Mechanics, Bruxelles, 1956.

Scanned with OKEN Scanner

144*. Мочалов С. Д., Графический метод исследования продольного упруго-пластического удара стержней. Ученые записки Томского гос. ун-та, № 17, 1952.
145. Мочалов С. Д., К вопросу о распространении упруго-пластических волн вдоль стержня переменного предела упругости. Ученые записки Томского гос. ун-та, № 25, 1955, pp.49—67
146. Мочалов С. Д., О многократном ударе по концу полубесконечного стержня. Ученые записки Томского гос. ун-та, № 25, 1955, pp. 68—76.
147. Morrison J. A., Wave propagation in rods of Voigt material and visco-elastic materials with three-parameter models. Q. Appl. Math. XIV, 2, 1956, pp. 153—169.
148.* Murta M. N., On three-dimensional plastic wave propagation Univ. Lisboa. Revista Fac. Ci. II, Ser. A4, 1955, pp. 63—78.
149. Nadai A., Theory of flow and fracture of solids, New York, Toronto, London, 1950.
150. Надеева Р. И., Соударение упругого и упруго-пластического стержней. Вест. М.Г.У., № 5, 1953, pp. 39—44.
151. Надеева Р. И., Об определении динамической зависимости между напряжениями и деформациями. Вест. М.Г.У., № 10, 1953, pp. 93—98.
152. Огибалов П. М., Сжатие технических масел при высоких мгновенных давлениях. Вест. М.Г.У., № 6, 1949, pp.19-34.
153. Огибалов П. М. и Логинова М. А., On the dependence of the strains in a rapid deformation under impulsive loading beyand the elastic limit. Appl. Mech. Rev., 3, 1, 1950, recenzia 60.
154. Owens R. H. and Symonds P. S., Plastic deformations of a Free Ring Under Concentrated Dynamic Loading. J. Appl. Mech., 22, 4, 1955, pp. 523—529.
155. Pack D. C., Evans. W. M. and James H. J., The propagation of shock waves in steel and lead. Proc. Phil. Soc. London. 61, 1, 1948.
156. Pao Yoh-Han, Extension of the Hertz Theory of Impact to the Viscoelastic Case. J. Appl. Phys., 26, 9, 1955, pp. 1083—1088.
157. Parkes E. W., The permanent deformation of a cantilever struck transversely at its tip. Proc. Roy. Soc., Series A, 228, 1955, pp. 462—476.
158. Pearson J. and Rinehart J., Deformation and Fracturing of Thick Walled Steel Cylinders under explosive Attack. J. Appl. Phys., 23, 4, 1952, pp. 434—441.
159. Perkins H. C., Movies of Stress Waves in Photoelastic Rubber. J. Appl. Mech., 20, 1, 1953, pp. 140—141.
160.* Petersson S., Trans. of the Roy. Instit. of Technology. No. 62, 1953, pp. 3—21.
161. Pironneau Y., Déformation par chocs répétés de monocristaux d'Al-Cu. Comptes Rendus Paris, 236, 1, 1953, pp. 46—48.
162. Ponomarev S. D., Biderman V. L., Liharev K. K., Makuşin V. M., Malinin N. N. şi Feodosiev V. I., Calculul modern de rezistenţă în construcţia de maşini, vol. I (traducere din limba rusă). Bucureşti, Ed. Tehnică, 1956, pp. 466—484.
163. Prager W., J. Appl. Phys., 16, 12, 1945, pp. 837—840.
164. Prager W., Recent Developements in the Mathematical Theory of Plasticity. J. Appl. Phys., 20, 3, 1949.

Scanned with OKEN Scanner

165. Prager W., Discontinuous fields of plastic stress and flow. Proc. Second U. S. nat. Congr. appl. Mech. June 1954; Amer. Soc. mech. Engrs., 1955, pp. 21—32.
166. Prager W. and Hodge P., Theory of perfectly plastic solids. New York — London, Wiley, 1951.
167. Prandtl L., Proc. Intern. Cong. Applied Mechanics, Delft, 1924.
168. Prandtl L., Ein Gedankenmodell zur kinematischen Theorie der festen Körper. ZAMM, Bd. 8, 1928, pp. 85—106.
169. Pugh E. M, Heine-Geldern R. v., Foner S. and Mutschler E. C., Glass Cracking Caused by High Explosives. J. Appl. Phys., 23, 1, 1952, pp. 48—53.
170. Рахматулин Х. А., О распространении волны разгрузки. ПММ, IX, 1, 1945, pp. 91—100.
171. Рахматулин Х. А., О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. ПММ, IX, 6, 1945, pp. 449—462.
172. Рахматулин Х. А., О распространении волны разгрузки вдоль стержня переменного предела упругости. ПММ, X, 3, 1946, pp. 333—346.
173. Рахматулин Х. А., Об ударе по гибкой нити. ПММ, XI, 3, 1947, pp. 379—382.
174. Рахматулин Х. А., О распространении цилиндрических волн при пластических деформациях (скручивающий удар). ПММ, XII, 1, 1948, pp. 39—46.
175. Рахматулин Х. А., Исследование законов распространения плоских упруго-пластических волн в среде с переменным пределом упругости. ПММ, XIV, 1, 1950, pp. 65—74.
176.* Рахматулин Х. А., О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации. Уч. записки М.Г.У., IV, в. 152, 1951.
177.* Рахматулин Х. А., Поперечный удар по гибкой нити с переменной скоростью. Ученые записки М.Г.У., IV, в. 154, 1951.
178. Рахматулин Х. А., Поперечный удар по гибкой нити телом заданной формы. ПММ, XVI, 1, 1952, pp. 23—34.
179. Рахматулин Х. А. и Шапиро Г. С., О распространении плоских упруго-пластических волн. ПММ, XII, в. 4, 1948, pp. 369—374.
180. Рахматулин Х. А. и Шапиро Г. С., Распространение возмущений в нелинейно-упругой и неупругой среде. Изв. А. Н. СССР, отд. техн. наук, № 2, 1955, pp. 68—89.
181. Reuss A., ZAMM, 10, 3, 1930, pp. 226—274.
182. Рябова Е. В., Поперечный удар с переменной скоростью по гибкой нити. Вест. М.Г.У., № 10, 1953, pp. 85—91.
183. Richter Hans, Die elastische-plastische Reflexion eines Stabes. ZAMM, 33, 7, 1953, pp. 237—244.
184. Riemann B., Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Ab. Ges. Wiss. Göttingen, t. VIII, 1860.
185. Rinehart J., Some Quantitative Data Bearing on the Scabbing of Metals under Explosive Attack. J. Appl. Phys., 22, 5, 1951, pp. 555—560.
186. Rinehart J., J. Appl. Phys., 22, 9, 1951, p. 555.
187. Rinehart J., Scabbing of Metals under Explosive Attack; Multiple Scabbing. J. Appl. Phys., 23, 11, 1952, pp. 1229—1233.

Scanned with OKEN Scanner

188. Rinehart J., Deformation of an Explosively Loaded Aluminium Single Crystal. J. Appl. Phys. 26, 11, 1955, pp. 1315—1317.
189. Rinehart J. and Pearson J., Conical Surfaces of Fracture Produced by Asymmetric Impulsive Loading. J. Appl. Phys., 23, 6, 1952, pp. 685—687.
190. Riparbelli C., A Paradox in the Theroy of Impact. J. Aeronaut. Sci., 21, 6, 1954, pp. 429—430.
191. Розовский М. И., Приложение интегро-дифференциальных уравнений к некоторым динамическим задачам теории упругости при наличии последействия. ПММ, XI, 3, 1947, pp. 329—338.
192. Rubin R. J., Propagation of Longitudinal Deformations Waves in a Prestressed Rod of Material Exhibiting a Strain Rate Effect. J. Appl. Phys., 25, 4, 1954, pp. 528—531.
193. Saint-Venant B., Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. J. de Math. pures et appl., sér. II, t. 16, 1871, pp. 308—316.
194. Шапиро Г. С., Продольные колебания стержней. ПММ, X, 5—6, 1946, pp. 597—616.
195. Шапиро Г. С., Распространение упруго-пластических волн в стержнях переменного сечения. ПММ, XVI, 3, 1952, pp. 335—340.
196. Савин Г. М., О динамических усилиях в шахтном подъемном канате (подъем груза). Д.А.Н. СССР, XCVII, 6, 1954, pp. 991—994.
197. Савин Г. М., Шевело В. М., Кужій А., Про поздовжні коливання нитки змінної довжини при внутрі шньому терті гістерезисного типу. Прикладна Механіка, II, 2, 1956, p. 133—146.
198. Savitt J., A Note on Shock Propagation in Brass. J. Appl. Phys., 24, 10, 1953, p. 1335.
199. Scott E. J., Wave propagation in a visco-elastic medium. Q. Appl. Math., XII, 3, 1954, pp. 300—306.
200. Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике. Гостехтеоретиздат, Москва, 1954.
201. Seiler J. A. and Symonds P. S., Plastic Deformation in Beams under Distributed Dynamic Loads. J. Appl. Phys., 25, 5, 1954, pp. 556—563.
202. Seiler J. A., Cotter B. A. and Symonds P. S., Impulsive Loading of Elastic-Plastic Beams. J. Appl. Mech. 23, 4, 1956, pp. 515—521
203. Шилькрут Д. И., Продольные колебания не вполне упругого полубесконечного стержня. Научные записки института машиноведения и автоматики АН УССР, Т. IV, серия машиноведения, в. 3, 1955, pp. 33—42.
204. Шилькрут Д. И., О распространении волн в не вполне упругой среде. Извест. Акад. Наук СССР, отд. техн. наук, 4, 1956, pp. 160—163.
205. Sips R., Propagation Phenomena in Elastic-Viscous Media. Journ. of. Polymer Sci., VI, 3, 1951, pp. 285—293.
206. Смирнов В. И., Курс высшей математики, Т. IV, изд. третье, Москва, 1953.

Scanned with OKEN Scanner

207. Smith E. A. L., Impact and Longitudinal Wave Transmission. Trans. ASME, 77, 6, 1955, pp. 963—973.
208. Соколов Л. Д., К вопросу о вычислении сопротивления металлов пластическому деформированию в зависимости от скорости деформации и температуры. ДАН, 67, 3, 1949, pp. 459—462.
209. Соколовский В. В., Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях. ДАН, 60, 5, 1948, pp. 775—778.
210. Соколовский В. В., Распространение цилиндрических волн сдвига в упруго-вязко-пластической среде. ДАН, 60, 8, 1948, pp. 1325—1328.
211. Соколовский В. В., Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях. ПММ, XII, 3, 1948, pp. 261—280.
212. Соколовский В. В., Одномерные нестационарные движения вязко-пластической среды. ПММ, XIII, 6, 1949, pp.623-632.
213. Соколовский В. В., Статика сыпучей среды, Гостехтеоретиздат, Москва, 1954.
214. Sokolovski V. V., Teoria Plasticităţii (traducere din limba rusă), Bucureşti, Ed. Tehnică, 1954.
215. Станюкович К. П., Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехтеоретиздат, Москва, 1955.
216. Sternglass E. J. and Stuart D. A., An Experimental Study of the Propagation of Transient Longitudinal Deformations in Elastoplastic Media. J. Appl. Mech., 20, 3, 1953, pp. 427 — 434.
217.* Symonds P. S. and Leth C., Impact of Finite Beams of Ductile Metal. J. Mech. and Phys. of Solids., vol. 2, 1954.
218. Symonds P. S., Methods of plastic structural analysis for dynamic loading. IX International Congress of Applied Mechanics, Bruxelles, 1956.
219.* Taylor G. I., The testing of materials at high rates of loading. J. Inst. Civil. Engrs., 26, 1946, pp. 486—519.
220. Taylor G., The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress. I Theoretical considerations. Proc. Roy. Soc., Series A, vol. 194, 1948, pp. 289—299.
221. Терминология теории упругости, испытаний и механических свойств материалов и строительной механики. Изд. АН СССР, Москва, 1952.
222.* Thomas T. Y., On the characteristic surfaces of the von Mises plasticity equations. J. Rational Mech. and Anal., 1, 1952, pp. 343—357.
223. Thomas T. Y., Singular surfaces and flow lines in the theory of plasticity. J. Rational Mech. and Anal., 2, 1953, pp. 339—381.
224. Thomas T. Y., Characteristic Surfaces in the Prandtl-Reuss Plasticity Theory. J. Rational Mech. and Anal., 5, 2, 1956, pp. 251—262.
225. Thomson W. T., Impulsive response of beams in the elastic and plastic regions. J. Appl. Mech., 21, 3, 1954, pp. 271—278.
226. Thorne C. J., A Plastic Flow and Vibrations. J. Appl. Mech., 17, 1, 1950, pp. 84—90.
227. Tresca H., Mémoire sur l'écoulement des corps solides. Mém, prés. par div. sav., T. 18, 1868 et T. 20, 1872.
228. Trifan D., Stress theory of plastic flow. J. Math, and. Phys., 35, 1, 1956, pp. 44—51.

Scanned with OKEN Scanner

229. Volterra E., On elastic continua with hereditary characteristics. J. Appl. Mech., 18, 3, 1951, pp. 273—279.
230. Volterra E., A mathematical interpretation of some experiments on plastic and rubberlike materials. Proc. of the Second Intern. Congress of Rheology, London, 1954, pp. 73—78.
231. Volterra E., Eubanks R. A. and Muster D., An investigation of the dynamic properties of plastic and rubberlike materials. Proc. Soc. Exper. Stress. Anal., vol. XIII, 1, 1955, pp. 85—96.
232. Volterra V., Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles. Paris. 1913.
233. Walsch M. and Christian R. H., Equation of State of Metals from Shock Wave Measurements. The Physical Review, 97, 6, 1955, pp. 1544—1556.
234. Wang A. J. and Hopkins H. G., On the plastic deformation of built-in circular plates under impulsive load. J. Mech. and Phys. of Solids, 3, 1, 1954, pp. 22—37.
235. Whiffin A. C., The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress. II. Tests on various metallic materials. Proc. Roy Soc., Series A, vol. 194, 1948, pp. 300—322.
236.* White M. P., The dynamic stress-strain relation of a metal with a welldefined yield-point. Proc. Seventh. int. Congr. Appl. Mech., 1, 1948. pp. 329—343.
237. White M. P., On the Impact Behaviour of a Material With a Yield Point. J. Appl. Mech., 16, 1, 1949, pp. 39—54.
238. White M. P., J. Appl. Mech., 22, 1, 1955, pp. 132—133.
239.* White M. P. and Griffis Le van, The permanent strain in a uniform bar due to longitudinal impact. J. Appl. Mech., 14. 4, 1947, pp. 337—343.
240.* White M. P. and Griffis Le van, The propagation of plasticity in uniaxial compression. J. Appl. Mech., 15, 3, 1948.
241.* Wolf H., The propagation of torsional plastic waves in circular cylindrical tubes and shafts. Grad. Div. appl Math. Brown Univ., Tech. Rep. A11-50, 1949.
242. Wood D. S., On Longitudinal Plane Waves of Elastic-Plastic Strain in Solids. J. Appl. Mech., 19, 4, 1952, pp. 521—525.
243. Зверев И. Н., Распространение возмущений в вязко-упругом и вязко-пластическом стержне. ПММ, XIV, 3, 1950, pp. 295—302.
244. Zener C., Упругость и неупругость металлов. Изд. Иностр. Лит., Москва, 1954.
245. Allen W. A. and Goldsmith W., Spall Effects Produced by a Cylindrical and a Spherical Charge of High Explosive. J. Appl. Phys., 25, 6, 1954, pp. 813—814.
246. Allen W. A. and Goldsmith W., Elastic Description of a High-Amplitude Spherical Pulse in Steel. J. Appl. Phys., 26, 1, 1955, pp. 69—74.
247. Bleich H. H. and Salvadori M. G., Impulsive motion of elasto-plastic beams. Trans. Am Soc. Civil Eng., 120, 1955, pp. 499—520.
248. Cotter B. A. and Symonds P. S., Plastic deformations of a beam under impulsive loading. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs., 81, 675, 1955, p. 21.

Scanned with OKEN Scanner

249. **Craggs J. W.**, The Normal Penetration of a Thin Elastic-Plastic Plate by a Right Circular Cone. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Section A, LXIII, IV, 1951—1952, pp. 359—370.
250. **Craggs J. W.**, The propagation of infinitesimal plane waves in elastic-plastic materials. J. Mech. Phys. Solids, 5, 2, 1957, pp. 115—124.
251. **Eder F. X.**, Die Messung der dynamischen Festigkeit plastischer Werkstoffe. Z. angew. Phys., 5, 1, 1953, pp. 1—5.
252. **Goldsmith W.**, Spherical Wave Propagation in Isotropic Elasto-Plastic Media. University of California, Institute of Engineering Research, Series No. 63, Report 3, 1953, 43 + VI p.
253. **Hopkins H. G.**, The Theory of Deformation on Non-hardening Rigid-Plastic Plates under Transverse Load. Deformation and Flow of Solids, Colloquium Madrid, Sept. 1955, Springer-Verlag.
254. **Hopkins H. G.**, On the plastic theory of plates Proc. Roy. Soc. A, 241, 1957, pp. 153—179.
255. **Катасонов А. М., Распространение сферинеских термовязко-упругих возмущений Вест. МГУ, № 3, 1957, pp. 39—49.**
256. **Ringleb F. O.**, Motion and Stress of an Elastic Cable Due to Impact. J. Appl. Mech. 24, 3, 1957, pp. 417—425.
257. **Salvadori M. G.** and **Di Maggio F.**, On the development of plastic hinges in rigid-plastic beams. Q. Appl. Math., XI, 2, 1953, pp. 223—230.
258. **Smith R. C.**, **Pardue T. E.** and **Vigness I.**, The mechanical properties of certain steels as indicated by axial dynamic load tests. Proc. Soc. Exper. Stress. Anal., XIII, 2, 1956, pp. 183—197.
259. **Thomas T. Y.**, On the Propagation of Weak Discontinuities in Perfectly Plastic Solids. J. Math. and Mech., 6, 1, 1957, pp. 67—85.
260. **Thomas T. Y.**, Extended Compatibility Conditions for the Study of Surfaces of Discontinuity in Continuum Mechanics. J. Math. and Mech., 6, 3, 1957, pp. 311—322.
261. **Zaid Melvin** and **Burton Paul**, Mechanics of high speed projectile perforation. J. Franklin Institute, 264, 2, 1957, pp. 117—126.

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Pag

Prefață 3

Introducere 5

§ 1. Definiții 5
§ 2. Scurt istoric al problemei dinamice 6
§ 3. Caracteristicile mecanice ale materialelor 7
§ 4. Teoriile plasticității 16

Capitolul I. **Propagarea undelor plastice în bare semi-infinite**

§ 1. Stabilirea ecuațiilor în coordonate Lagrange 25
§ 2. Soluția lui Kármán-Duwez 28
§ 3. Soluția lui H. A. Rahmatulin 31
§ 4. Soluția aproximativă 44
§ 5. Unele dezvoltări ale metodei aproximative 56
§ 6. Propagarea undelor în bare cu secțiune variabilă 62
§ 7. Determinarea diagramei dinamice $\sigma \sim \varepsilon$, pentru diferite materiale 63
§ 8. Stabilirea ecuațiilor în coordonate Euler 69
§ 9. Soluția care neglijează deformațiile elastice 72

Capitolul II. **Influența vitezei de deformare**

§ 1. Legea de curgere 78
§ 2. Ecuațiile 86

Capitolul III. **Unde de șoc în solide**

§ 1. Posibilitatea apariției undelor de șoc în solide 90
§ 2. Concavitatea curbei $\sigma \sim \varepsilon$ dirijată spre axa tensiunilor crescătoare 91
§ 3. Cazul presiunilor hidrostatice foarte mari 101
§ 4. Alte probleme 104
§ 5. Ecuațiile de mișcare 106
§ 6. Aplicații 109

Capitolul IV. **Bara finită**

§ 1. Reflectarea undelor 116
§ 2. Unda reflectată de descărcare (cazul materialelor cu $\sigma \sim \varepsilon$ convex) 118

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

§ 3. Unda reflectată de descărcare (cazul materialelor cu $\sigma \sim \varepsilon$ concav) 126
§ 4. Alte lucrări 133

Capitolul V. **Propagarea undelor plastice în bare cu limita de elasticitate variabilă**

§ 1. Punerea problemei 141
§ 2. Limita de elasticitate crescătoare 142
§ 3. Limita de elasticitate descrescătoare 146
§ 4. Problema acumulării în bară a deformaţiilor plastice 149
§ 5. O altă tratare a problemei 152

Capitolul VI. **Propagarea perturbaţiilor în fire flexibile şi deformabile**

§ 1. Lovirea oblică cu viteză constantă a unui fir flexibil 154
§ 2. Lovirea transversală, cu viteză variabilă, a unui fir flexibil .. 166
§ 3. Mişcarea firului în spaţiu 169
§ 4. Influenţa vitezei de alungire 180
§ 5. Propagarea undelor de şoc în fire 185
§ 6. Lovirea transversală a firelor cu corpuri de diferite forme .. 192

Capitolul VII. **Alte probleme cercetate**

§ 1. Problema lovirii plăcilor 199
§ 2. Propagarea undelor în bare 217
§ 3. Problema axial simetrică 219
§ 4. Unde plane, sferice, suprafeţe de discontinuitate 226

Bibliografie 233

Scanned with OKEN Scanner

Controlul Ştiinţific: Ing. Petre P. Teodorescu

Responsabil de carte: Ing. Lucian Manoliu
Tehnoredactor: Nicolae Pantazianu
Corector responsabil: Florin Pompilian

Dat la cules 03.01.58. Bun de tipar 18.02.58. Hîrtie semi velină de 65 g/m², 61×86/16. Coli editoriale 15,15. Coli de tipar 15,5.
Comanda P. R. 3468 A. 1078; E 14790
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari 620.17:539.4.
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mici 620.

Tiparul executat sub c. 915, la Intreprinderea Poligrafică nr. 4
Calea Şerban Vodă nr. 133—Bucureşti R.P.R.

Scanned with OKEN Scanner

ERATA

Pag.	Rînd	În loc de:	Se va citi:	Din vina:
42	13 j	ε	$\widetilde{\varepsilon}$	Tipografiei
51	10 j	M_1	m_1	Editurii
119	5	$0 < \xi \leqslant 1$	se va citi cu un rînd mai sus	,,
136	2	Φ_4	Φ_4'	Tipografiei
238	9 j	$\varepsilon\,(x)$	$\widetilde{\varepsilon}\,(x)$	,,
149	5 j	$\sigma\left[\quad\right]$	$\sigma\left(\quad\right)$	Editurii
151	12	$+\,\lambda_1 q_0 + \lambda_n \lambda_{n-1} \cdots + \lambda_1 \varepsilon_{s6}\,.$	$\cdots\,\lambda_1 q_0 + \lambda_n \lambda_{n-1} \cdots \lambda_1 \varepsilon_{s0}\,.$	,,
165	1 j	$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}$	$= \int_{z_0}^{z}$	,,
194	15	$(w \cos\gamma +$	$(w_t \cos\gamma +$	Tipografiei

C. 919 — Probleme dinamice.

Scanned with OKEN Scanner